

**Курс общей физики, том I.****Механика, колебания и волны, молекулярная физика.**

Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1970 г.

Главная цель книги — познакомить студентов прежде всего с основными идеями и методами физики. Особое внимание обращено на разъяснение смысла физических законов и на сознательное применение их. Несмотря на сравнительно небольшой объем, книга представляет собой серьезное руководство, обеспечивающее подготовку, достаточную для успешного усвоения в дальнейшем теоретической физики и других физических дисциплин.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие к четвертому изданию	8	§ 12. Классическая механика.	46
Из предисловия к первому изданию	8	Границы ее применимости	
<b>ЧАСТЬ I</b>		§ 13. Первый закон Ньютона,	47
<b>ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ</b>		Инерциальные системы отсчета	
<b>МЕХАНИКИ</b>		§ 14. Второй закон Ньютона	49
Введение	9	§ 15. Единицы измерения и размерности физических величин	53
<b>Глава I. Кинематика</b>	12	§ 16. Третий закон Ньютона	58
§ 1. Перемещение точки.	12	§ 17. Принцип относительности Галилея	59
Векторы и скаляры		§ 18. Сила тяжести и вес	62
§ 2. Некоторые сведения о векторах	14	§ 19. Силы трения	65
§ 3. Скорость	22	§ 20. Силы, действующие при криволинейном движении	70
§ 4. Вычисление пройденного пути	25	§ 21. Практическое применение законов Ньютона	71
§ 5. Равномерное движение	27	§ 22. Импульс	73
§ 6. Проекция вектора скорости на координатные оси	28	§ 23. Закон сохранения импульса	75
§ 7. Ускорение	29	<b>Глава III. Работа и энергия</b>	79
§ 8. Прямолинейное равнопеременное движение	30	§ 24. Работа	79
§ 9. Ускорение при криволинейном движении	31	§ 25. Мощность	84
§ 10. Кинематика вращательного движения	37	§ 26. Потенциальное поле сил. Силы консервативные и неконсервативные	86
§ 11. Связь между векторами $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$	42	§ 27. Энергия. Закон сохранения энергии	89
<b>Глава II. Динамика материальной точки</b>	46	§ 28. Связь между потенциальной энергией и силой	99
		§ 29. Условия равновесия механической системы	101

§ 30. Центральный удар шаров	103	§52. Распределение давления в покоеющихся жидкости и газе	198
<b>Глава IV. Неинерциальные системы отсчета</b>	108	§ 53. Выталкивающая сила	198
§ 31. Силы инерции	108	<b>Глава VIII. Гидродинамика</b>	200
§ 32. Центробежная сила инерции	110	§ 54. Линии и трубки тока. Неразрывность струя	200
§ 33. Сила Кориолиса	112	§ 55. Уравнение Бернулли	202
<b>Глава V. Механика твердого тела</b>	122	§ 56. Измерение давления в текущей жидкости	203
§ 34. Движение твердого тела	122	§ 57. Применение к движению жидкости закона сохранения импульса	208
§ 35. Движение центра инерции твердого тела	126	§ 58. Силы внутреннего трения	210
§ 36. Вращение твердого тела. Момент силы	127	§ 59. Ламинарное и турбулентное течение	214
§ 37. Момент импульса материальной точки. Закон сохранения момента импульса	134	§ 60. Движение тел в жидкостях и газах	215
§ 38. Основное уравнение динамики вращательного движения	139	<b>ЧАСТЬ 2</b>	
§ 39. Момент инерции	143	<b>КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ</b>	
§ 40. Кинетическая энергия твердого тела	148	<b>Глава IX. Колебательное движение</b>	221
§ 41. Применение законов динамики твердого тела	152	§ 61. Общие сведения о колебаниях	221
§ 42. Свободные оси. Главные оси инерции	162	§ 62. Гармонические колебания	223
§ 43. Момент импульса твердого тела	166	§ 63. Энергия гармонического колебания	228
§ 44. Гироскопы	168	§ 64. Гармонический осциллятор	230
§ 45. Деформации твердого тела	173	§ 65. Малые колебания системы вблизи положения равновесия	233
<b>Глава VI. Всемирное тяготение</b>	181	§ 66. Математический маятник	234
§ 46. Закон всемирного тяготения	131	§ 67. Физический маятник	235
§ 47. Зависимость ускорения силы тяжести от широты местности	184	§ 68. Графическое изображение гармонических колебаний. Векторная диаграмма	238
§ 48. Масса инертная и масса гравитационная	186	§ 69. Сложение колебаний одинакового направления	239
§ 49. Законы Кеплера	188	§ 70. Биения	240
§ 50. Космические скорости	190	§ 71. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	242
<b>Глава VII. Статика жидкостей и газов</b>	193	§ 72. Фигуры Лиссажу	247
§ 51. Давление	193	§ 73. Затухающие колебания	248
		§ 74. Автоколебания	253
		§ 75. Вынужденные колебания	254

§ 76. Параметрический резонанс	261	<b>Глава XII. Элементарная</b>	323
<b>Глава X. Волны</b>	263	<b>кинетическая теория газов</b>	
§ 77. Распространение воли в упругой среде	263	§ 99. Уравнение кинетической теории газов для давления	323
§ 78. Уравнения плоской и сферической волн	266	§ 100. Строгий учет распределения скоростей молекул по направлениям	331
§ 79. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении	270	§ 101. Равнораспределение энергии по степеням свободы	336
§ 80. Волновое уравнение	271	§ 102. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа	340
§ 81. Скорость распространения упругих волн	273	§ 103. Уравнение адиабаты идеального газа	348
§ 82. Энергия упругой волны	275	§ 104. Политропические процессы	350
§ 83. Интерференция и дифракция волн	281	§ 105. Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах	352
§ 84. Стоячие волны	283	§ 106. Распределение молекул газа по скоростям	354
§ 85. Колебания струны	286	§ 107. Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла	365
§ 86. Эффект Допплера	287	§ 108. Барометрическая формула	368
§ 87. Звуковые волны	289	§ 109. Распределение Больцмана	369
§ 88. Скорость звуковых волн в газах	290	§ 110. Определение Перреном числа Авогадро	372
§ 89. Шкала уровней силы звука	295	§ 111. Средняя длина свободного пробега	375
§ 90. Ультразвук	299	§ 112. Явления переноса. Вязкость газов	379
<b>ЧАСТЬ 3</b>		§ 113. Теплопроводность газов	384
<b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА</b>		§ 114. Диффузия в газах	388
<b>Глава XI. Предварительные сведения</b>	302	§ 115. Ультразреженные газы	393
§ 91. Молекулярно-кинетическая теория (статистика) и термодинамика	302	§ 116. Эффузия	393
§ 92. Масса и размеры молекул	304	<b>Глава XIII. Реальные газы</b>	399
§ 93. Состояние системы. Процесс	301	§ 117. Отклонение газов от идеальности	399
§ 94. Внутренняя энергия системы	308	§ 118. Уравнение Ван-дер-Ваальса	403
§ 95. Первое начало термодинамики	309	§ 119. Экспериментальные изотермы	408
§ 96. Работа, совершаемая телом при изменениях его объема	312	§ 120. Пересыщенный пар и	413
§ 97. Температура	315		
§ 98. Уравнение состояния идеального газа	316		

перегретая жидкость		<b>состояние</b>	
§ 121. Внутренняя энергия реального газа	416	§ 137. Отличительные черты кристаллического состояния	461
§ 122. Эффект Джоуля — Томсона	417	§ 138. Классификация кристаллов	463
§ 123. Ожижение газов	421	§ 139. Физические типы кристаллических решеток	466
<b>Глава XIV. Основы термодинамики</b>	424	§ 140. Тепловое движение в кристаллах	469
§ 124. Введение	424	§ 141. Теплоемкость кристаллов	469
§ 125. Коэффициент полезного действия тепловой машины	426	<b>Глава XVI. Жидкое состояние</b>	473
§ 126. Второе начало термодинамики	428	§ 142. Строение жидкостей	473
§ 127. Цикл Карно	429	§ 143. Поверхностное натяжение	475
§ 128. Коэффициент полезного действия обратимых и необратимых машин	432	§ 144. Давление под изогнутой поверхностью жидкости	479
§ 129. К. п. д. цикла Карно для идеального газа	436	§ 145. Явления на границе жидкости и твердого тела	482
§ 130. Термодинамическая шкала температур	438	§ 146. Капиллярные явления	486
§ 131. Приведенное количество тепла. Неравенство Клаузиуса	441	<b>Глава XVII. Фазовые равновесия и превращения</b>	490
§ 132. Энтропия	444	§ 147. Введение	490
§ 133. Свойства энтропии	448	§ 148. Испарение и конденсация	491
§ 134. Теорема Нернста	454	§ 149. Плавление и кристаллизация	494
§ 135. Энтропия и вероятность	454	§ 150. Уравнение Клапейрона—Клаузиуса	496
§ 136. Энтропия идеального газа	457	§ 151. Тройная точка. Диаграмма состояния	499
<b>Глава XV. Кристаллическое состояние</b>	461	Предметный указатель	504

### ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно твердое тело	10	— давления	298
Абсолютный градус	440	— колебания	226
— нуль температуры	319, 454	— скорости	228
Авогадро закон	321	— сферической волны	280
— число	305, 372, 374	Анизотропия	461, 502
Автоколебания	222, 253	Атмосфера нормальная	196
Адиабата идеального газа	349, 415	— техническая	196
Акустический спектр	290	— физическая	196
— — линейчатый	290	Атомный вес	304
— — сплошной	290	Аэродинамика	193, 220
Аморфные тела	461, 474, 494	Барометрическая формула	369
Амплитуда биений	242	Бел	296
— вынужденных колебаний	257	Бернулли уравнение	204

- Биения 241  
Бойля — Мариотта закон 316, 319  
Больцмана закон распределения 369, 371, 372  
— постоянная 330, 374  
Броуновское движение 302, 372  
Вакуум 393  
Ван-дер-Ваальса постоянные 403, 405, 408  
— уравнение 403, 405, 409  
Ватт 85  
Вектор 13  
— аксиальный 39  
— плотности потока энергии 278  
— полярный 39  
Векторная диаграмма 238  
Векторы коллинеарные 14  
— компланарные 14  
Вероятность математическая 455  
— термодинамическая 455  
Вес 63, 64  
Вечный двигатель второго рода 429  
— — первого рода 427  
Вильсона камера 415  
Водоструйный насос 205  
Волновая поверхность 266  
Волновое уравнение 271, 272  
— число 268  
Волновой вектор 270  
Волны 263  
— бегущие 266, 471  
— затухающие 280, 281  
— звуковые 289  
— когерентные 281  
— плоские 266  
— поперечные 263  
— продольные 263  
— стоячие 283, 286, 471  
— сферические 266, 269  
— ультразвуковые 299  
Волчок 168  
Вязкость 69, 210, 211  
— газа 379  
— динамическая 215  
— жидкости 210, 219, 474  
— кинематическая 215  
Газ ван-дер-ваальсовский 416  
— идеальный 319, 323  
Газ реальный 399  
— — ультраразреженный 393  
Галилея преобразования 60  
— — принцип относительности 59, 62  
Гармонический осциллятор 230  
Гей-Люссака закон 316, 317, 319  
Герц 226  
Гиббса парадокс 459  
Гидродинамика 193, 200  
Гироскоп 168  
Гироскопический компас 169  
— эффект 168  
Главные оси инерции 164, 167  
Гравитационная постоянная 181, 184  
Градиент 100  
Грамм-атом 305  
Грамм-молекула 305  
Группы пространственные 465  
Гаука закон 50, 176, 178  
Гюйгенса принцип 283  
Давление 193, 194  
— внутреннее 404  
— газа 324, 329, 330, 335, 393  
— динамическое 207, 208  
— капиллярное 481, 486  
— критическое 408  
— насыщенного пара 410, 411, 493  
— отрицательное 414, 416  
— парциальное 330, 389  
— под изогнутой поверхностью жидкости 481  
— полное 207  
— статическое 207  
Дальтона закон 331  
Движение апериодическое 253  
— вращательное 11, 122  
— в центральном поле сил 137

- плоское 122, 124, 126
- поступательное 11, 122, 127
- равномерное 27
- равнопеременное 30
- твердого тела 122
- тепловое 302
- Декремент затухания 251
- Деформация 10, 49
  - кручения 178
  - остаточная 174
  - пластическая 174
  - растяжения 174
  - сдвига 174
- Деформация сжатия 174
  - упругая 50, 174
- Децибел 296
- Джоуль 82, 310
- Джоуля—Томсона эффект 417, 418
- Диаграмма состояния 500
- Дина 56
- Динамика 11
- Диспергирование 301
- Дисперсия 294
- Дифракция волн 283
- Дифференциальный манометр 208
- Диффузия 379, 389
- Длина волны 265
  - свободного пробега 375
- Добротность колебательной системы 251, 260
- Допплера эффект 287
- Дьюара сосуд 423
- Дюлонга и Пти закон 471
- Единицы измерения 53
  - — вязкости 213
  - — давления 196
  - — мощности 85
  - — работы 82
  - — силы 56
- Единичный вектор 19, 20
- Жидкость 473
  - идеальная 203, 210
  - , квазикристаллическое строение 473
- несжимаемая 201, 202
- перегретая 414, 415
- переохлажденная 461, 496, 501
- растянутая 414, 416
- Закон всемирного тяготения 181, 189
  - инерции 48
  - сохранения импульса 77, 208
  - — момента импульса 138
  - — энергии 97, 98
- Законы сухого трения 67
- Зародыши 496
- Затухание волны 296
- Звук 289
  - , высота 289, 290
  - , громкость 289, 295, 296
  - , тембр 289, 290
- Звук тональный 290
- Зонд 207
- Изобара 318
- Изобразительная точка 231
- Изотерма 317
  - Ван-дер-Ваальса 406, 409
  - двухфазной системы 409, 410, 495
  - идеального газа 317
  - критическая 407, 412
  - экспериментальная 409, 411
- Изотропия 461
- Изохора 318
- Изэнтропа 449
- Импульс 73, 74
  - системы 75, 76
- Инертность 51
- Интенсивность звука 295
- Интерференция волн 281
- Инфразвук 289
- Испарение 491
- Источник точечный 269
- Источники когерентные 281
- Кавендиша опыт 183, 184
- Калория 310
- Капилляр 486

- Капиллярность 486  
Капицы турбодетандер 423  
Карно цикл 430, 436, 449, 496  
Квадрат вектора 82  
Квантование энергии 346  
Кеплера законы 188  
Килогерц 226  
Килограмм 55  
Килограмм-атом 305  
Килограмм-молекула 305  
Килограммометр 82  
Килограмм-сила 56  
Килокалория 310  
Киломоль 305  
Кинематика 11  
Кипение 415  
Клапейрона — Клаузиуса формула 496, 498  
Клапейрона уравнение 321  
Классы симметрии 465  
Клаузиуса неравенство 442  
Когерентность 281  
Колебания 221  
— вынужденные 222, 254  
— — установившиеся 257  
Колебания гармонические 222, 223, 225, 239, 267  
— затухающие 248  
— малые 233  
— параметрические 222  
— свободные 222  
— собственные 222  
— струны 286  
Количество движения 74  
— тепла 309  
Конденсация 414, 491  
Концентрация 388  
Коэффициент внутреннего трения 211 379  
— вязкости 211, 213, 382  
— — газа 379  
— диффузии 390, 391, 392  
— затухания волны 281  
— — колебаний 250  
— поверхностного натяжения 477, 479  
— поглощения волны 281  
— полезного действия обратной машины 436  
— — — тепловой машины 427  
— — — цикла Карно 437  
— поперечного сжатия 176  
— Пуассона 176  
— сопротивления 248  
— теплопроводности 384  
— — газа 387  
— — ультраразреженного газа 395  
— трения 68, 70  
— — в ультраразреженном газе 394  
— упругости 175  
— холодильный 428  
Краевой угол 483  
Кривая инверсии 420  
— испарения 498, 499  
— плавления 495, 500  
— сублимации 498, 500  
Кривизна кривой 33  
— поверхности 480  
Кристаллизация 495  
Кристаллическая решетка 462, 463  
Кристаллографические системы 465  
Кристаллы 461  
— атомные 466  
— жидкие 473, 474  
— ионные 466  
Кристаллы металлические 468  
— молекулярные 468  
Критические величины 408  
Ламмерта опыт 366  
Лапласа оператор 272  
— формула 481  
Линии тока 200  
Лиссажу фигуры 247  
Логарифмический декремент затухания 251  
Лошадиная сила 85

- Лошмидта число 321  
Максвелла — Больцмана закон  
  распределения 371  
Максвелла закон распределения 359,  
  363, 365  
Масса 49, 52  
— атома 305  
— гравитационная 187  
—, зависимость от скорости 74  
— Земли 188  
— инертная 187  
— киломоля 305  
— молекулы 305  
— Солнца 188  
— тяготеющая 187  
Материальная точка 11  
Маятник математический 234  
— оборотный 238  
— физический 235  
— —, приведенная длина 237  
— Фуко 121  
Мегагерц 226  
Мениск 486  
Метр 55  
Механика квантовая 47  
— классическая 46  
— релятивистская 47, 74  
Механический эквивалент тепла 310  
Микропуаз 213  
Модуль вектора 13  
— сдвига 178  
— Юнга 176  
Молекула 302  
Молекулярный вес 304  
— пучок 365, 366, 367  
Моль 305  
Момент импульса относительно оси  
  134  
— — — точки 134  
Момент импульса системы  
  материальных точек 138  
— — твердого тела 166, 167  
— инерции 128, 140, 141, 143, 147  
— количества движения 134  
— пары сил 130, 131  
— силы относительно оси 128, 131,  
  132, 141  
— — — точки 128, 129, 141  
Монокристалл 462  
Мощность 85  
Напряжение 175  
— нормальное 175  
— тангенциальное 175  
Натяжение поверхностное 475, 482,  
  486  
Начала термодинамики 303, 424  
Начальные условия 227  
Невесомость 64  
Нернста теорема 454  
Несмачивание 484  
Нормальные условия 321  
Нормировочный множитель 359  
Ньютон 56  
Ньютона закон второй 49, 52, 74, 140  
— — первый 47, 53  
— — третий 58, 59  
— законы 46  
— —, практическое применение 71  
Обертон 287, 290  
Обтекаемая форма тел 217  
Объем критический 408  
— удельный 410  
Ожижение газов 421  
— —, метод Клода 423  
— —, — Линде 421  
Орт 19, 20  
Оси симметрии 464  
Ось вращения 11, 37, 122  
— — мгновенная 125, 126  
Пар 409, 413  
— насыщенный 410, 411  
— пересыщенный 414  
Пара сил 130  
Параметры кристаллической ячейки  
  462  
— состояния 306



- Паскаля закон 196  
Перемещение 12  
Период затухающих колебаний 250  
— идентичности кристаллической решетки 462  
— колебания 226  
— — маятника математического 235  
— — — физического 236  
— обращения 39  
Перпетуум мобиле второго рода 429  
— — первого рода 427  
Перрена опыт 373  
Пито трубка 207  
Плавление 494  
Плечо импульса 134  
— пары сил 130  
— силы относительно оси 133  
— — — точки 129  
Плоскости симметрии 464  
— спайности 461  
Плотность 143  
— вероятности 232  
— потока энергии 277, 280, 295  
— энергии волны 276  
— — упругой деформации 180  
Пограничный слой 217  
Подобие при течении 215  
Показатель политропы 352  
Поле вектора скорости 200  
— сил 86  
— — потенциальное 87, 68  
— — тяжести 89  
— центральных сил 86, 89  
Поликристалл 462, 496  
Политропа 351  
Порог болевого ощущения 295  
— слышимости 295  
Порядок ближний 473  
— дальний 473  
Поток тепла 384  
— энергии 277, 279, 280  
Правило правого винта 37  
— сложения скоростей 61  
Прецессия гироскопа 172  
Приведенное количество тепла 442  
Принцип отвердевания 194  
— суперпозиции 281  
Произведение векторов векторное 42  
— — —, Дистрибутивность 43  
Произведение векторов скалярное 82, 83  
— — —, дистрибутивность 83  
Процесс 307  
— адиабатический 348, 350  
— изобарический 318, 350  
— изотермический 317, 350, 453  
— изохорический 318, 350  
— круговой 425  
— необратимый 457  
— обратимый 424  
— политропический 350, 352  
— равновесный 308, 425  
Пуаз 213  
Пуассона уравнение 349  
Путь 12, 26  
Пучность стоячей волны 284  
Работа 79, 83, 84, 309, 312  
— идеального газа при адиабатическом процессе 354  
— — — — изотермическом процессе 354  
— — — — политропическом процессе 353  
— при вращении 149  
— — круговом процессе 425  
— — расширении 312  
Радиус-вектор 19  
Радиус молекулярного действия 404, 475  
Размерности физических величин 57, 58  
Распределение молекул по значениям кинетической энергии 363  
— — — — потенциальной энергии 370  
— — — скоростям 359

- — — — в пучке 367
- Реактивное движение 78
- Реакция 63
  - вытекающей струи 209, 210
  - текущей жидкости на стенке трубы 209
- Резонанс 258
  - параметрический 261
- Резонансные кривые 259
- Рейнольдса число 215, 218
  - —, критическое значение 215
- Самодиффузия 392
- Свободные оси 163, 166
- Связь гетерополярная 466
  - гомеополярная 466
- Связь жесткая 337
  - ионная 466
  - ковалентная 466
  - упругая 338
- Сезерленда постоянная 377
  - формула 377
- Секунда 55
- Сила 49, 101
  - Архимеда 198
  - внешняя 75, 142
  - внутренняя 75, 142
  - вынуждающая 254
  - выталкивающая 198
  - гироскопическая 170, 171
  - инерции 109, 110, 155
  - — кориолисова 112, 114, 115, 119, 120
  - — центробежная 111, 114, 115, 120
  - квазиупругая 223
  - консервативная 87
  - кулоновская 466
  - лобового сопротивления 216
  - неконсервативная 87
  - нормальная 70
  - нормального давления 66
  - подъемная 216, 219, 220
  - сопротивления среды 69
  - тангенциальная 70
  - трения 65, 88, 379, 382
  - — качения 160
  - — покоя 65, 66
  - — скольжения 67
  - тяжести 62, 64, 153, 154, 185
  - —, зависимость от широты местности 184
  - упругая 81
  - центростремительная 70
- Силы ван-дер-ваальсовские 468
  - поверхностного натяжения 477
  - центральные 86
- Симметрия кристаллической решетки 463
  - трансляционная 463
- Сингонии 465
- Система единиц 54
  - — абсолютная 54
  - — международная 55
  - — МКГСС 56
  - — СГС 56
  - замкнутая 75
  - изолированная 449
  - отсчета 9
  - — гелиоцентрическая 49
- Система отсчета инерциальная 48, 53, 61
  - — неинерциальная 48, 108
  - термодинамическая 306
- Скаляр 13
- Скорость волн в упругой среде 273
  - звука в газах 294
  - истечения из отверстия 206
  - космическая вторая 191, 192
  - — первая 190, 192
  - линейная 23, 39
  - молекул наиболее вероятная 360
  - — средняя 294, 362, 364
  - — — квадратичная 362
  - секториальная 190
  - угловая 39
  - — прецессии 172, 173

- фазовая 268, 273, 275
- центра инерции 76
- Сложение колебаний 239, 242
- Смачивание 484
- Сопротивление давления 217, 218
- лобовое 216, 217, 218
- трения 217, 218
- формы 217
- Состояние метастабильное 414, 496
- неравновесное 306
- равновесное 307, 424
- Статика 11
- Степени свободы 233
- — вращательные 337
- — колебательные 338, 340, 470
- — поступательные 336, 339
- Стокса закон 218
- Сублимация 491
- Суперпозиция волн 281
- Сухой лед 468, 502
- Сфера молекулярного действия 404, 475
- Температура 315
- абсолютная 318, 330
- критическая 407, 408, 411 412 421, 479, 492
- плавления 494
- Температурная шкала абсолютная 316, 318
- — идеально-газовая 322
- — Кельвина 318
- — термодинамическая 438.440
- — Цельсия 315, 318
- Температурная шкала эмпирическая 316, 322
- Температурный признак 315
- Тензор инерции 167
- Теорема о неразрывности струи 202
- Теория относительности 46, 187
- Тепловая машина 427
- Теплоемкость 340.
- газа, зависимость от температуры 345
- идеального газа 342, 343
- киломоля 341
- при политропическом процессе 351, 352
- — постоянном давлении 341, 342
- — — объеме 341, 343
- твердого тела 471
- удельная 341
- Теплопередача 309
- Теплопроводность 384
- газов 379
- — при низком давлении 394
- Теплород 303
- Теплосодержание 419
- Теплота испарения 492
- — плавления 494
- — сублимации 492
- — фазового перехода 491
- Термодинамика 303, 424
- , второе начало 424, 428
- , первое начало 309, 310, 424, 427
- —, третье начало 454
- Термометрическое тело 315, 438
- Течение ламинарное 214
- стационарное 201
- турбулентное 214
- установившееся 201
- Торричелли формула 206
- Точка критическая 407. 411
- тройная 412, 491, 499, 500
- Траектория 12
- Трение внешнее 65
- внутреннее 65, 210, 379, 393
- вязкое 65, 69
- жидкое 65
- — качения 65, 68
- скольжения 65
- сухое 65
- Трубка тока 201
- Удар абсолютно неупругий 103, 104
- — упругий 103, 105
- центральный 104
- Узел стоячей волны 284

- Ультразвук 289, 299
- Ультразвуковая дефектоскопия 300
  - локация 300
- Ультразвуковой эхолот 300
- Умова вектор 278
- Универсальная газовая постоянная 321, 322, 343, 374
- Упругость насыщенного пара 410, 491
- Уравнение волновое 271, 272
  - волны 266
  - динамики вращательного движения 140
  - диффузии 390
  - затухающей волны 280, 281
  - плоской волны 267, 269, 271
  - состояния 316
    - — идеального газа 321, 322
    - — реального газа 403
  - стоячей волны 284
  - сферической волны 269
  - теплопроводности 384
- Уровень громкости 295
- Уровни энергии 346
- Ускорение кориолисово 114
  - линейное 29
  - нормальное 32, 36, 41, 70
  - свободного падения 62, 186
  - силы тяжести 62, 184, 238
    - — —, нормальное значение 186
    - — —, стандартное значение 186
  - тангенциальное 36, 42, 70
  - угловое 40
  - центростремительное 70
- Условие нормировки функции распределения 359
- Условия равновесия механической системы 101
  - — твердого тела 155
- Фаза волны 268
  - колебания 226
  - — начальная 226
  - термодинамическая 409, 490
- Фазовая плоскость 230
  - траектория 231, 252
- Фазовый переход второго рода 491
  - — — первого рода 491
- Физика молекулярная 302
  - статистическая 303, 379
- Физическая кинетика 379
- Физически бесконечно малый объем 143
- Фронт волны 266
- Функция распределения 357, 358
  - состояния 308, 311, 446
- Холодильная машина 427
- Центр инерции 75, 78, 127, 152, 154
  - качания 237
  - тяжести 75, 154
- Центры конденсации 414
  - кристаллизации 496
- Цикл 425, 426
- Частота биений 242
  - колебания 226
  - — математического маятника 235
  - круговая 227
  - основная 287, 290
  - резонансная 258
  - собственная 249
  - циклическая 227
- Частоты собственные струны 287
- Число оборотов 40
  - степеней свободы 336, 346
- Шкала уровней силы звука 295
- Штейнера теорема 145
- Штерна опыт 365
- Шумы 290
- Электронные пары 467
- Элементы симметрии кристалла 464
- Эмульсия 301
- Энергии равнораспределение 336, 339
- Энергия 90
  - взаимодействия молекул 401
  - внутренняя 308, 453
  - — ван-дер-ваальсовского газа 417

— — идеального газа 340, 342  
— — кристалла 470  
— — реального газа 416  
— гармонического колебания 228  
— — осциллятора 231  
— кинетическая 90, 91, 92  
— — при плоском движении 151,  
152  
— — твердого тела 148  
— поверхностная 476, 482  
— полная 95, 96  
— потенциальная 90, 93, 94, 101  
— свободная 453, 479  
— связанная 453  
— упругой волны 275  
— — деформации 179  
Энтальпия 419

Энтропия 447, 449, 454  
— идеального газа 457  
—, статистическое толкование 454  
Эрг 82  
Эффективное сечение молекулы 375  
Эффективный диаметр молекулы  
375, 378, 402  
Эффузионный метод разделения  
изотопов 398  
Эффузия 396  
— встречная изотермическая 397  
— тепловая 396  
Явления капиллярные 486  
— переноса 379  
Ячейка кристалла примитивная 463  
— — элементарная 462

## **ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ**

При подготовке к настоящему изданию книга была значительно переработана. Написаны заново (полностью или частично) параграфы 7, 17, 18, 22, 27, 33, 36, 37, 38, 40, 43, 68, 88. Существенные добавления или изменения сделаны в параграфах 2, 11, 81, 89, 104, 113.

Ранее, при подготовке ко второму и третьему изданиям, были написаны заново параграфы 14, 73, 75. Существенные изменения или добавления были внесены в параграфы 109, 114, 133, 143.

Таким образом, по сравнению с первым изданием облик первого тома заметно изменился. Эти изменения отражают методический опыт, накопленный автором за последние десять лет преподавания общей физики в Московском инженерно-физическом институте.

Июль 1969 г.

*И. Савельев*

## **ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ**

Предлагаемая вниманию читателей книга представляет собой первый том учебного пособия по курсу общей физики для вузов. Автор в течение ряда лет преподавал общую физику в Московском инженерно-физическом институте. Естественно поэтому, что пособие он писал, имея в виду прежде всего студентов инженерно-физических специальностей вузов.

При написании книги автор стремился познакомить учащихся с основными идеями и методами физической науки, научить их физически мыслить. Поэтому книга не является по своему характеру энциклопедичной. Ее содержание в основном посвящено тому, чтобы разъяснить смысл физических законов и научить сознательно применять их. Не осведомленности читателя по максимально широкому кругу вопросов, а глубоких знаний по фундаментальным основам физической науки — вот чего стремился добиться автор.

1961 г.

*И. Савельев*

# ЧАСТЬ I

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

---

### ВВЕДЕНИЕ

Механика представляет собой учение о простейшей форме движения материи, которое состоит в перемещении тел или их частей друг относительно друга.

Перемещение тел мы наблюдаем повседневно в обыденной жизни. Отсюда следует наглядность механических представлений. Этим же объясняется то, что из всех естественных наук механика прежде других получила широкое развитие.

Движение одного и того же тела относительно различных тел может иметь разный характер. Если, например, тело 1 относительно нас покоится, а тела 2 и 3 движутся в одну и ту же сторону с одинаковой скоростью, то тело 3 перемещается относительно тела 1, однако покоится относительно тела 2. Поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела (или группы неподвижных друг относительно друга тел) будет отсчитываться перемещение данного тела. Выбранное для этой цели тело (или группа тел) образует систему отсчета.

Практически для описания движения приходится связывать с телами, образующими систему отсчета, какую-либо систему координат, например декартову или прямоугольную систему координат.

Координаты тела позволяют определить его положение в пространстве. Однако движение происходит как в пространстве, так и во времени (пространство и время — неотъемлемые формы существования материи). Поэтому для описания движения необходимо также отсчитывать время. Это делается с помощью часов.

Располагая координатной системой, связанной с выбранной системой отсчета, и часами, можно приступить к описанию движения тел.

Движение тел обычно происходит в условиях, когда на них действуют силы. Действие этих сил наряду с тем, что определяет характер движения, вызывает также деформацию тел, т. е. изменение их размеров и формы. Очень часто деформации настолько незначительны, что ими можно пренебречь при описании движения тела. Тело, деформациями которого в условиях рассматриваемой задачи можно пренебречь, называется абсолютно твердым телом. Следует иметь в виду, что абсолютно твердых (т. е. совершенно недеформируемых) тел в природе не существует. Только пренебрежимо малая роль деформаций при движении тел в определенных условиях дает возможность рассматривать их как абсолютно твердые.

Рис. 1.

Иногда при рассмотрении движения тел можно пренебречь их размерами. Это бывает в тех случаях, когда размеры тела во много раз меньше прочих размеров, с которыми приходится иметь дело в условиях данной задачи. Например, при определении пути, проходимого автомобилем при переезде из Ленинграда в Москву, размерами автомобиля вполне можно пренебречь.

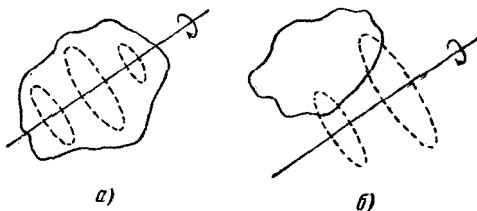


Рис. 2.

Иногда при рассмотрении движения тел можно пренебречь их размерами. Это бывает в тех случаях, когда размеры тела во много раз меньше прочих размеров, с которыми приходится иметь дело в условиях данной задачи. Например, при определении пути, проходимого автомобилем при переезде из Ленинграда в Москву, размерами автомобиля вполне можно пренебречь.



Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой. Вопрос о том, можно ли данное конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров самого тела, а от условий задачи. Одно и то же тело в одних случаях может быть сочтено за материальную точку, в других же — должно рассматриваться как протяженное тело. Так, например, при вычислении траектории, по которой Земля движется вокруг Солнца, Землю можно рассматривать как материальную точку. При рассмотрении же движения тел по поверхности Земли она должна рассматриваться как протяженное тело.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения — поступательное и вращательное.

**Поступательное движение** — это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе (рис. 1).

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения (рис. 2). Ось вращения может находиться вне тела (рис. 2, б).

Поскольку, говоря о каком-либо теле как о материальной точке, мы отвлекаемся от его протяженности, понятие вращательного движения вокруг проходящей через него оси к такому телу неприменимо.

Механика подразделяется на три раздела: 1) кинематику, 2) статику и 3) динамику. Кинематика изучает движение тел вне зависимости от тех причин, которые обуславливают это движение, статика изучает условия равновесия тел и, наконец, динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики оказываются естественным следствием законов динамики. По этой причине в курсах физики статика обычно отдельно не изучается.

# ГЛАВА I

## КИНЕМАТИКА

### § 1. Перемещение точки. Векторы и скаляры

Материальная точка при своем движении описывает некоторую линию. Эта линия называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т. д.

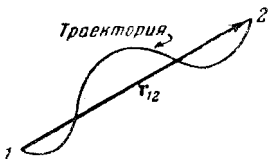


Рис. 3.

Пусть материальная точка (в дальнейшем мы для краткости будем говорить просто точка) переместилась вдоль некоторой траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 3).

Расстояние от точки 1 до точки 2, отсчитанное вдоль траектории, представляет собой пройденный путь. Мы будем обозначать его буквой  $s$ .

Отрезок прямой, проведенный из точки 1 в точку 2, называется перемещением. Обозначим его  $r_{12}$ . Перемещение характеризуется, кроме своей величины (равной длине отрезка  $r_{12}$ ), также и направлением. Действительно, рассмотрим два одинаковых по величине перемещения  $r_{12}$  и  $r_{13}$  (рис. 4). Несмотря на равенство длин этих отрезков, они явно представляют собой совершенно различные перемещения.

Величины, подобные перемещению, подчиняются особому правилу сложения, которое можно уяснить на следующем примере. Пусть точка совершает последовательно два перемещения:  $r_{12}$  и  $r_{23}$  (рис. 5). Суммой этих двух перемещений естественно назвать такое переме-

шение  $r_{13}$ , которое приводит к тому же результату, что и первые два перемещения вместе.

Величины такого рода, как перемещение, т. е. характеризующиеся численным значением и направлением, а также складывающиеся по правилу, показанному на рис. 5, называются векторами. К числу векторов принадлежат скорость, ускорение, сила и ряд других величин.

Величины, для задания которых достаточно одного численного значения, называются скалярами. Примерами скаляров могут служить путь, время, масса и т. д.

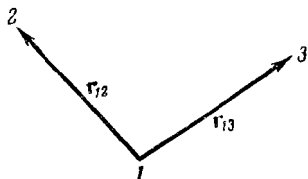


Рис. 4.

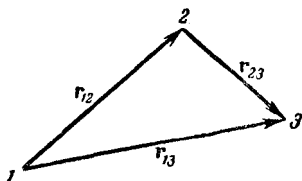


Рис. 5.

Векторы принято обозначать буквами жирного шрифта. Например, вектор перемещения из точки 1 в точку 2 обозначается  $\mathbf{r}_{12}$ . Та же буква обычного шрифта означает численное значение или, как говорят, модуль соответствующего вектора<sup>1)</sup>. Для обозначения модуля пользуются также символом вектора, заключенным между двумя вертикальными черточками. Таким образом,

$$|\mathbf{A}| = A = \text{модулю вектора } \mathbf{A},$$

$$|\mathbf{r}_{12}| = r_{12} = \text{модулю вектора } \mathbf{r}_{12}.$$

Модуль вектора — скаляр, причем всегда положительный.

На чертежах векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце. Длина отрезка в установленном масштабе дает модуль вектора, а указанное стрелкой направление отрезка дает направление вектора.

Показанная на рис. 5 операция сложения векторов символически записывается следующим образом:

$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13}.$$

<sup>1)</sup> При письме векторы обозначают буквами со стрелкой над ними (например,  $\vec{r}_{12}$ ). В этом случае та же буква без стрелки означает модуль вектора.

## § 2. Некоторые сведения о векторах

Векторы, направленные вдоль параллельных прямых (в одну и ту же или в противоположные стороны), называются коллинеарными.

Векторы, направления которых параллельны одной и той же плоскости, называются компланарными.

Одинаковые по модулю коллинеарные векторы, направленные в одну и ту же сторону, считаются равными друг другу<sup>1)</sup>. Равные по модулю коллинеарные векторы, имеющие противоположные направления, считаются отличающимися друг от друга по знаку. Так, например, между векторами, изображенными на рис. 6, и их модулями имеются следующие соотношения:

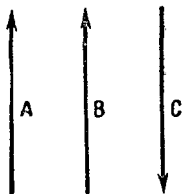


Рис. 6.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{B}; \quad \mathbf{A} = -\mathbf{C}; \quad \mathbf{B} = -\mathbf{C}; \\ A &= B = C \quad \text{или} \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}|. \end{aligned}$$

**Сложение векторов.** О том, как складываются два вектора в результирующий вектор, была уже речь в предыдущем параграфе. Рассмотрим теперь этот вопрос

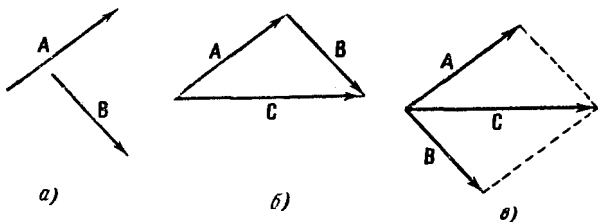


Рис. 7.

несколько подробнее. Пусть нам даны два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 7, а). Чтобы получить результирующий век-

<sup>1)</sup> Имеются в виду так называемые свободные векторы, т. е. векторы, которые могут быть отложены из любой точки пространства. Кроме свободных, бывают скользящие векторы, начало которых может скользить по прямой, проходящей через вектор, и связанные векторы, т. е. векторы, приложенные к определенной точке. Последние два вида векторов могут быть выражены через свободные векторы; по этой причине в основу векторного исчисления положено понятие свободного вектора, называемого обычно просто вектором.

тор **C**, перенесем вектор **B** параллельно самому себе так, чтобы его начало оказалось совмещенным с концом вектора **A**<sup>1)</sup> (рис. 7, б). Тогда вектор **C**, проведенный из начала вектора **A** в конец вектора **B**, будет представлять собой результирующий вектор:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Можно, однако, осуществить построение несколькими иным способом (рис. 7, в). Перенесем вектор **B** (или **A**) так, чтобы начала обоих векторов оказались совмещенными. Затем построим на векторах **A** и **B** параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма, очевидно, совпадает с вектором **C**, полученным по способу, показанному на рис. 7, б. По этой причине иногда говорят, что векторы складываются по правилу параллелограмма.

Оба рассмотренных способа — б) и в) — дают одинаковый результат. Однако в случае сложения более чем двух векторов способ б) оказывается более простым и удобным. Пусть даны векторы **A**, **B**, **C** и **D** (рис. 8). Перенесем векторы параллельно самим себе таким образом,

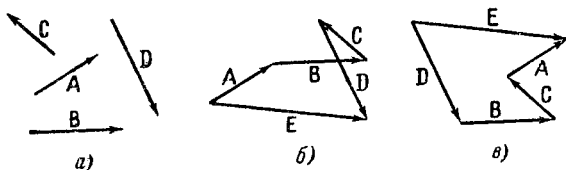


Рис. 8.

чтобы начало последующего вектора оказалось совмещенным с концом предыдущего. Получится ломаная линия. Результирующий вектор будет представлять собой вектор **E**, проведенный из начала первого из слагаемых векторов **A** в конец последнего **D**. Легко убедиться в том, что результирующий вектор **E** не зависит от последовательности, в которой складываются заданные векторы. На рис. 8, б показан случай  $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}$ , а на рис. 8, в — случай  $\mathbf{E} = \mathbf{D} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{A}$ .

<sup>1)</sup> Такой перенос можно рассматривать как замену вектора **B** равным ему вектором, имеющим начало, совпадающее с концом вектора **A**.

**Вычитание векторов.** Разностью двух векторов  $A - B$  называется такой вектор  $C$ , который в сумме с векто-

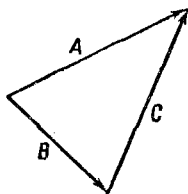


Рис. 9.

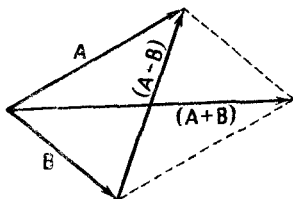


Рис. 10.

ром  $B$  дает вектор  $A$  (рис. 9). Поскольку разность  $A - B$  может быть представлена в виде

$$A - B = A + (-B),$$

вектор  $C = A - B$  можно получить, сложив вектор  $A$  с вектором, равным по величине вектору  $B$ , но имеющим противоположное ему направление.

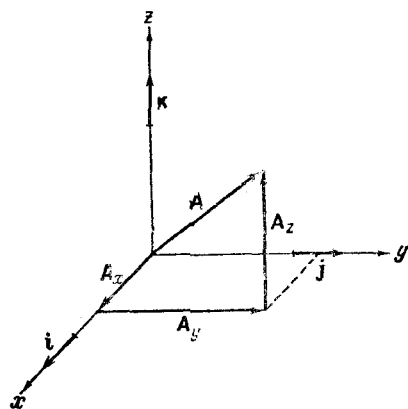


Рис. 11.

На рис. 10 сопоставлены сумма и разность векторов  $A$  и  $B$ .

**Разложение векторов на составляющие.** Каждый вектор  $A$  можно заменить несколькими векторами  $A_1, A_2$  и т. д., которые в сумме дают вектор  $A$ . В этом случае векторы  $A_1, A_2$  и т. д. называются составляющими вектора  $A$ . Саму операцию замены вектора  $A$  несколькими векторами называют разложением вектора  $A$  на составляющие.

На рис. 11 показано разложение вектора  $A$  на составляющие, имеющие направления прямоугольных координатных осей. Символами  $A_x, A_y, A_z$  обозначены составляющие вектора  $A$  по осям  $x, y$  и  $z$ .

**Проекция вектора на ось.** Пусть нам даны вектор  $A$  и некоторое направление в пространстве (ось), которое мы обозначим, например, буквой  $n$  (рис. 12). Проведем

через начало и конец вектора  $\mathbf{A}$  плоскости, перпендикулярные к направлению  $n$ . Точки  $1'$  и  $2'$ , в которых пересекаются эти плоскости с осью  $n$ , называются проекциями начала и конца вектора  $\mathbf{A}$  на ось  $n$ . Величина отрезка оси, заключенного между плоскостями, называется проекцией вектора  $\mathbf{A}$  на направление (или на ось)  $n$ . Проекция вектора — скаляр. Если направление от точки  $1'$  к точке  $2'$  совпадает с направлением  $n$ , проекция считается положительной; в противном случае проекция отрицательна.

Проекция обозначается той же буквой, что и сам вектор, с добавлением индекса, обозначающего то направление, на которое спроектирован вектор. Например, проекция вектора  $\mathbf{A}$  на направление  $n$  обозначается  $A_n$ .

Введем в рассмотрение угол  $\varphi$ , который образует вектор  $\mathbf{A}$  с осью  $n$  (рис. 12). Проекция  $A_n$ , очевидно, может быть вычислена следующим образом:

$$A_n = A \cos \varphi, \quad (2.1)$$

где  $A$  — модуль вектора  $\mathbf{A}$ .

Если вектор образует с данным направлением острый угол, косинус этого угла положителен, проекция вектора также положительна. Если вектор образует с осью тупой угол, косинус этого угла отрицателен, проекция также отрицательна. Если вектор перпендикулярен к данной оси, проекция его равна нулю.

На рис. 13 показаны проекции нескольких векторов на координатные оси  $x$  и  $y$ . Для этих проекций имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_x &= C_x > 0, & B_x < 0; \\ A_y &= B_y > 0, & C_y < 0. \end{aligned}$$

Если вектор  $\mathbf{A}$  образует с осями  $x$ ,  $y$  и  $z$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , то его проекции будут равны:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A \cos \alpha, \\ A_y &= A \cos \beta, \\ A_z &= A \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

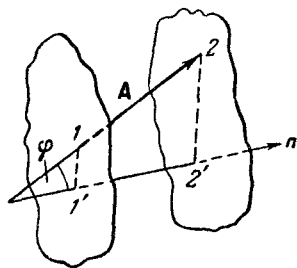


Рис. 12.

Легко понять, что по заданным проекциям вектора на три координатные оси может быть построен сам вектор. Следовательно, всякий вектор может быть определен тремя числами — проекциями его на оси координат. Напомним, что скаляр задается одним числом.

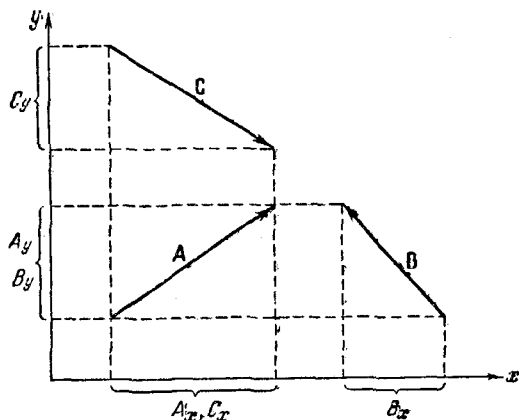


Рис. 13.

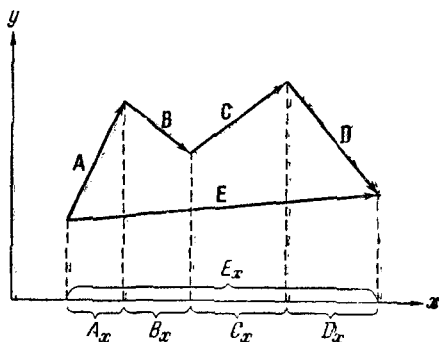


Рис. 14.

Рассмотрим сумму нескольких векторов  $E = A + B + C + D$  (рис. 14). Очевидно, что

$$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x, \quad (2.3)$$

т. е. проекция суммы векторов на некоторое направление равна сумме проекций слагаемых векторов на то же направление.



**Радиус-вектор.** Радиусом-вектором точки называется вектор, проведенный из начала координат в данную точку (рис. 15). Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  однозначно определяет положение точки в пространстве. Его проекции на координатные оси равны, как видно из рисунка, декартовым координатам точки:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z. \quad (2.4)$$

Квадрат модуля вектора  $\mathbf{r}$  равен сумме квадратов координат:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.5)$$

**Умножение вектора на скаляр.** В результате умножения вектора  $\mathbf{A}$  на скаляр  $a$  получается новый вектор  $\mathbf{B}$ , модуль которого в  $|a|$  раз больше модуля вектора  $\mathbf{A}$ , а направление совпадает с направлением  $\mathbf{A}$ , если скаляр  $a$  положителен, и противоположно ему, если скаляр  $a$  отрицателен. Если  $\mathbf{B} = a\mathbf{A}$ , то  $B = |a|A$ .

Деление вектора на скаляр  $b$  равносильно умножению вектора на скаляр  $a = 1/b$ .

**Единичный вектор.** Каждому вектору  $\mathbf{A}$  может быть сопоставлен единичный вектор  $\mathbf{A}_{\text{единичн}}$ , имеющий то же направление, что и  $\mathbf{A}$ , а по модулю равный единице. Очевидны следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= A \cdot \mathbf{A}_{\text{единичн}}, \\ \mathbf{A}_{\text{единичн}} &= \frac{\mathbf{A}}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Единичный вектор имеет также другое название — орт. Модули составляющих вектора по координатным осям  $\mathbf{A}_x$ ,  $\mathbf{A}_y$  и  $\mathbf{A}_z$  (см. рис. 11) равны модулям проекций вектора на эти оси:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_x| &= |A_x|, \\ |\mathbf{A}_y| &= |A_y|, \\ |\mathbf{A}_z| &= |A_z|. \end{aligned}$$

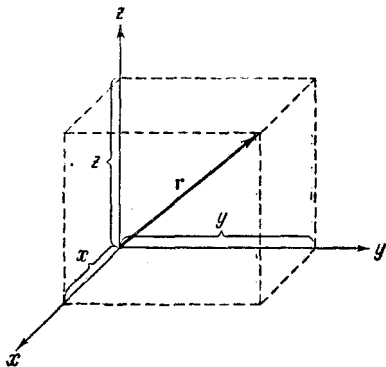


Рис. 15.

Введем единичные векторы, имеющие направления координатных осей. Их принято обозначать следующим образом: единичный вектор, направленный по оси  $x$ , символом  $\mathbf{i}$ , по оси  $y$  — символом  $\mathbf{j}$  и по оси  $z$  — символом  $\mathbf{k}$ <sup>1)</sup>. Векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  называют ортами осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Тогда, например, составляющую  $\mathbf{A}_x$  можно представить в виде (см. рис. 11)

$$\mathbf{A}_x = A_x \mathbf{i}. \quad (2.7)$$

В самом деле, модуль вектора  $A_x \mathbf{i}$  будет равен  $|A_x|$ , т. е.  $|A_x|$ . Далее, если вектор  $\mathbf{A}_x$  направлен в ту же сторону, что и ось  $x$ , т. е. совпадает по направлению с ортом  $\mathbf{i}$ , то, как легко видеть из рис. 11,  $A_x$  положительна, если же  $\mathbf{A}_x$  направлен в сторону отрицательных  $x$ , т. е. противоположно вектору  $\mathbf{i}$ ,  $A_x$  оказывается отрицательной, так что вектор  $A_x \mathbf{i}$  имеет направление, противоположное  $\mathbf{i}$  и, следовательно, совпадающее с направлением вектора  $\mathbf{A}_x$ .

Для двух других составляющих  $\mathbf{A}_y$  и  $\mathbf{A}_z$  можно написать выражения, аналогичные (2.7)

$$\mathbf{A}_y = A_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{A}_z = A_z \mathbf{k}.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{A}$  равен сумме своих составляющих, можно написать:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}. \quad (2.8)$$

Таким образом, любой вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и единичные векторы (орты) этих осей.

**Производная вектора.** Предположим, что вектор (2.8) изменяется со временем по известному закону  $\mathbf{A}(t)$ . Это означает, что проекции вектора на координатные оси представляют собой заданные функции времени  $t$ :

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{i} A_x(t) + \mathbf{j} A_y(t) + \mathbf{k} A_z(t)$$

(если координатные оси не поворачиваются в пространстве, орты осей со временем не изменяются).

Пусть за промежуток времени  $\Delta t$  проекции вектора получают приращения  $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_y$ ,  $\Delta A_z$ , в результате чего сам вектор получает приращение  $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{i} \Delta A_x + \mathbf{j} \Delta A_y +$

<sup>1)</sup> Применяются также обозначения:  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ .

+  $k\Delta A_z$ . Скорость изменения вектора  $\mathbf{A}$  со временем  $t$  можно, очевидно, охарактеризовать отношением

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \mathbf{i} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

Написанное нами выражение дает среднюю скорость изменения  $\mathbf{A}$  в течение промежутка времени  $\Delta t$ . Пусть  $\mathbf{A}$  изменяется со временем непрерывно, без скачков. Тогда чем меньше промежуток  $\Delta t$ , тем точнее величина (2.9) характеризует скорость изменения  $\mathbf{A}$  в любой из моментов времени, принадлежащих промежутку  $\Delta t$ . Таким образом, скорость изменения вектора  $\mathbf{A}$  в момент времени  $t$  равна пределу выражения (2.9), получающемуся при неограниченном уменьшении  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \text{Скорость изменения } \mathbf{A} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \\ &= \mathbf{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Предел отношения приращения функции  $\Delta f$  к приращению аргумента  $\Delta t$ , получающийся при стремлении  $\Delta t$  к нулю, называется производной функции  $f$  по  $t$  и обозначается символом  $\frac{df}{dt}$ . Следовательно, скорость изменения со временем вектора  $\mathbf{A}$  равна

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt}. \quad (2.10)$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (2.8), легко видеть, что стоящие в (2.10) множители при ортах суть проекции вектора  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{пр } x} &= \frac{dA_x}{dt}, \\ \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{пр } y} &= \frac{dA_y}{dt}, \\ \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{\text{пр } z} &= \frac{dA_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Нужно быть очень аккуратным в обозначениях. Так, например, проекцию вектора  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  на ось  $x$  нельзя обозначить символом  $\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_x$ , потому что такой символ по

аналогии с  $A_x$  будет означать составляющую вектора  $\frac{dA}{dt}$  по оси  $x$ . Нельзя также обозначать эту проекцию символом  $\left(\frac{dA}{dt}\right)_x$  (подобно обозначению проекции вектора  $A$  символом  $A_x$ ), так как  $\left|\frac{dA}{dt}\right|$ , вообще говоря, отличен от  $\left|\frac{dA}{dt}\right|$ . Поэтому приходится прибегать к обозначениям вида  $\left(\frac{dA}{dt}\right)_{\text{пр } x}$  и т. д.

### § 3. Скорость

Положение материальной точки (в дальнейшем для краткости мы будем говорить просто точки) в пространстве можно задать с помощью радиуса-вектора  $r$ .

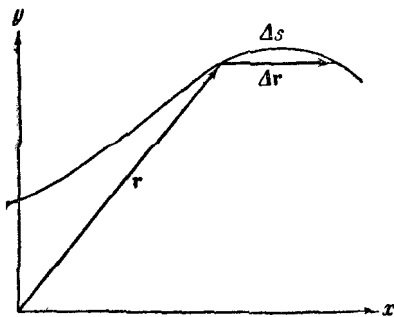


Рис. 16.

При движении точки вектор  $r$  изменяется, вообще говоря, и по величине, и по направлению<sup>1)</sup>.

Зафиксируем некоторый момент времени  $t$ . Ему соответствует значение  $r$  радиуса-вектора (рис. 16). В течение следующего за моментом  $t$  небольшого промежутка времени  $\Delta t$  (мы будем называть его элементарным) точка проходит элементарный путь  $\Delta s$  и получает элементарное перемещение  $\Delta r$ , которое совпадает с приращением радиуса-вектора за время  $\Delta t$ <sup>2)</sup>.

1) Рекомендуется в порядке упражнения указать траекторию, для которой радиус-вектор точки изменяется: а) только по величине, б) только по направлению.

2) Символом  $\Delta$  (дельта) мы будем пользоваться в двух случаях:

а) для обозначения доли какой-либо величины. Например, в рассматриваемом случае  $\Delta t$  есть часть всего времени, в течение которого происходит движение,  $\Delta s$  — часть всего пути, проходимого точкой;

б) для обозначения приращения какой-либо величины. В данном случае  $\Delta r$  есть приращение радиуса-вектора  $r$  за время  $\Delta t$ .

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

При данном  $t$  модуль и направление вектора (3.1), вообще говоря, зависят от величины промежутка  $\Delta t$ . Станем уменьшать  $\Delta t$  (соответственно будут также уменьшаться  $\Delta s$  и  $\Delta r$ ), наблюдая при этом за поведением отношения (3.1). Оказывается, что по достижении достаточно малых значений  $\Delta t$  вектор (3.1) практически перестает изменяться как по величине, так и по направлению. Это означает, что при стремлении  $\Delta t$  к нулю отношение (3.1) стремится к определенному пределу. Этот предел называется скоростью  $v$  движущейся точки в момент времени  $t$ . Символически сказанное выше записывается следующим образом:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Итак, скоростью называется предел, к которому стремится отношение  $\Delta r$  к  $\Delta t$  при неограниченном убывании  $\Delta t$ . Следовательно, скорость можно определить как производную радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad (3.3)$$

Как следует из ее определения, скорость есть величина векторная. Из рис. 17 видно, что вектор  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  является секущей для траектории.

При предельном переходе (3.2) точки пересечения этого вектора с траекторией все более сближаются ( $\Delta s$  стремится к нулю), сливаясь в конечном итоге в одну точку, вследствие чего секущая превращается в касательную. Таким образом, вектор скорости оказывается направленным по касательной к траектории в соответствующей точке (рис. 18).

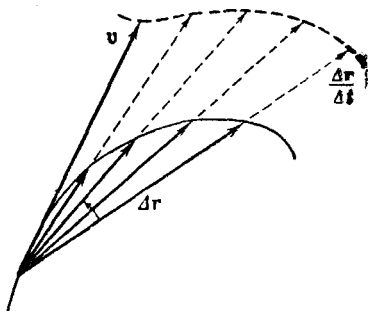


Рис. 17.

В соответствии с формулой (3.2) модуль вектора скорости может быть записан следующим образом:

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

В этом выражении нельзя вместо  $|\Delta \mathbf{r}|$  писать  $\Delta r$ . Символ  $|\Delta \mathbf{r}|$  означает модуль приращения вектора  $\mathbf{r}$ ,

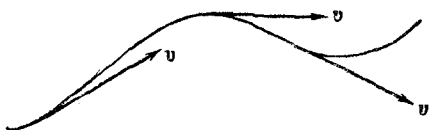


Рис. 18.

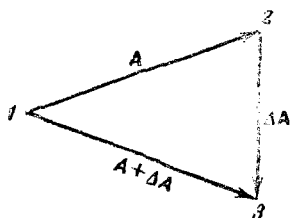


Рис. 19.

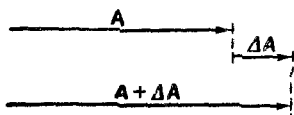
в то время как  $\Delta r$  представляет собой приращение модуля вектора  $\mathbf{r}$ :  $\Delta |\mathbf{r}|$ . Обе эти величины не равны друг другу:

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta |\mathbf{r}| = \Delta r.$$

В этом можно убедиться на следующем примере (рис. 19). Пусть некоторый вектор  $\mathbf{A}$  получает такое приращение  $\Delta \mathbf{A}$ , что модуль его не изменяется:

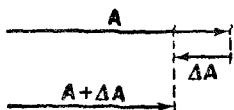
$$|\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}| = |\mathbf{A}|.$$

Следовательно, приращение модуля вектора  $\mathbf{A}$  равно нулю ( $\Delta |\mathbf{A}| = \Delta A = 0$ ). В то же время модуль приращения вектора  $|\Delta \mathbf{A}|$  отличен от нуля (он равен длине отрезка



$$\Delta |\mathbf{A}| = |\Delta \mathbf{A}|$$

равен длине отрезка



$$\Delta |\mathbf{A}| = -|\Delta \mathbf{A}|$$

Рис. 20.

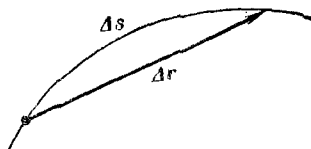


Рис. 21.

2—3). Рис. 20 поясняет, что при данном  $|\Delta \mathbf{A}|$  приращение модуля  $\Delta |\mathbf{A}|$  может иметь значение в пределах от  $-|\Delta \mathbf{A}|$  до  $+|\Delta \mathbf{A}|$ .

Элементарный путь  $\Delta s$ , вообще говоря, отличен по величине от модуля элементарного перемещения  $|\Delta r|$  (рис. 21). Однако, если брать отрезки пути  $\Delta s$  и перемещения  $\Delta r$ , соответствующие небольшим промежуткам времени  $\Delta t$ , то различие между  $\Delta s$  и  $|\Delta r|$  будет невелико, причем при уменьшении  $\Delta t$  путь  $\Delta s$  с возрастающей точностью будет совпадать с  $|\Delta r|$ . На этом основании можно написать, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

откуда в соответствии с (3.4) для модуля скорости получается следующая формула:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (3.5)$$

#### § 4. Вычисление пройденного пути

Из выражения (3.5) следует, что при малых  $\Delta t$

$$v \cong \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Последнее приближенное равенство выполняется тем точнее, чем меньше  $\Delta t$ . Если известна величина скорости  $v$  как функция времени  $t$ , можно вычислить путь, пройденный точкой с момента  $t_1$  до момента  $t_2$ . Для этого разобьем промежуток времени  $t_2 - t_1$  на  $N$  малых промежутков:  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N$ , которые могут быть различными по величине. Весь путь  $s$ , пройденный точкой, можно представить как сумму путей:  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_N$ , пройденных за соответствующие промежутки времени  $\Delta t$ ;

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i \quad ^1).$$

В соответствии с (4.1) каждое из слагаемых  $\Delta s_i$  ( $i$  — любое число от 1 до  $N$ ) может быть приближенно представлено в виде

$$\Delta s_i \cong v_i \Delta t_i,$$

<sup>1)</sup> Так принято записывать сокращенно сумму  $N$  слагаемых одинакового вида.

где  $\Delta t_i$  — промежуток времени, за который был пройден путь  $\Delta s_i$ , а  $v_i$  — одно из значений скорости за время  $\Delta t_i$ . Таким образом,

$$s \cong \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (4.2)$$

Написанное равенство выполняется тем точнее, чем меньше промежутки времени  $\Delta t_i$ . В пределе при стремлении всех  $\Delta t_i$  к нулю (количество промежутков  $\Delta t_i$  будет при этом неограниченно возрастать) сумма, стоящая справа, станет точно равна  $s$ :

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (4.3)$$

Скорость есть функция времени:  $v = v(t)$ . В математике выражение вида

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i,$$

составленное для значений  $x$ , заключенных в пределах от  $a$  до  $b$ , называют определенным интегралом и записывают символически следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Следовательно, путь, пройденный точкой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , равен определенному интегралу

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (4.4)$$

Покажем, что величину пройденного пути можно представить как площадь фигуры, которая ограничена кривой зависимости величины скорости  $v$  от времени  $t$ . Построим график функции  $v = v(t)$  (рис. 22). Произведение  $v_i \Delta t_i$  численно равно площади заштрихованной ( $i$ -й) полоски. Сумма таких произведений будет равна площади, ограниченной осью  $t$ , прямыми  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , а также ломаной линией, образованной верхними края-



ми всех подобных полосок. При стремлении  $\Delta t_i$  к нулю ширина всех полосок убывает (одновременно число их растет) и ломаная линия в пределе сольется с кривой  $v = v(t)$ .

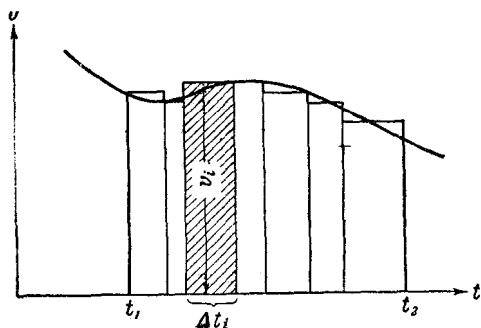


Рис. 22.

Таким образом, путь, пройденный за время с момента  $t_1$  до момента  $t_2$ , численно равен площади фигуры, ограниченной графиком  $v = v(t)$ , осью времени  $t$  и прямыми  $t = t_1$  и  $t = t_2$ .

## § 5. Равномерное движение

Движение, при котором скорость, изменяясь как угодно по направлению, остается постоянной по величине, называется равномерным.

При равномерном движении все  $v_i$  в формуле (4.3) будут одинаковы и равны  $v$ . Общий множитель  $v$  можно вынести за знак суммы:

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} v \sum \Delta t_i = v \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum \Delta t_i.$$

Сумма элементарных промежутков времени дает время  $t$ , за которое точка проходит путь  $s$ <sup>1)</sup>. Таким образом, можно написать:

$$s = vt. \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) следует, что при равномерном движении скорость равна пути  $s$ , деленному на время  $t$ , за

<sup>1)</sup> Буква  $t$  может применяться как для обозначения промежутка времени (как это сделано в данном случае), так и для обозначения момента времени (так, например, было сделано в начале § 3). Следует строго различать эти два случая.

которое он пройден:

$$v = \frac{s}{t}. \quad (5.2)$$

Согласно (5.2) можно сказать, что скорость при равномерном движении равна по величине пути, проходимому движущейся точкой за единицу времени. При неравномерном движении такое утверждение несправедливо. В этом случае можно сказать, что скорость в данный момент времени  $t$  равна по величине тому пути, который прошла бы точка за единицу времени, если бы она в дальнейшем сохранила то значение скорости, которое у нее было в момент  $t$ .

## § 6. Проекция вектора скорости на координатные оси

В определяющем скорость выражении (3.2) под знаком предела стоит вектор  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ . Взяв в (3.2) вместо этого вектора его проекцию на какое-либо направление, мы, очевидно, получим проекцию вектора  $\mathbf{v}$  на то же направление:

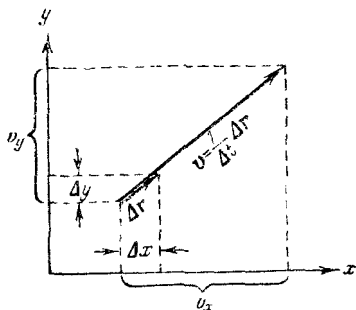


Рис. 23.

$$\text{пр. } \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{пр. } \Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (6.1)$$

Как видно из рис. 23, проекции вектора  $\Delta \mathbf{r}$  на оси координат равны приращениям соответствующих координат переместившейся точки:

$$(\Delta \mathbf{r})_x = \Delta x;$$

$$(\Delta \mathbf{r})_y = \Delta y;$$

$$(\Delta \mathbf{r})_z = \Delta z.$$

Подставляя эти выражения в формулу (6.1), получим проекции вектора скорости на координатные оси:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt};$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}.$$

В физике производные величин по времени  $t$  принято обозначать символом соответствующей величины с точкой над ним, например:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r}; \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad \text{и т. д.}$$

Используя эти обозначения, проекции вектора  $\mathbf{v}$  на координатные оси можно записать следующим образом:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}. \quad (6.2)$$

Заметим, что формулы (6.2) можно получить из формул (2.11), положив в последних  $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ .

### § 7. Ускорение

Согласно сказанному в § 2 о производной вектора быстрота изменения скоростей материальной точки  $\mathbf{v}$  со временем  $t$  характеризуется величиной

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (7.1)$$

Эта величина называется ускорением точки.

Если известны ускорение как функция времени  $\mathbf{w}(t)$  и скорость  $\mathbf{v}_0$  в начальный момент (при  $t = 0$ ), то можно найти скорость  $\mathbf{v}$  в любой момент времени  $t$ . Это осуществляется по формуле:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{w} dt.$$

В случае, когда  $\mathbf{w}$  постоянно,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}t. \quad (7.2)$$

Представим вектор скорости в виде [см. (6.2)]:

$$\mathbf{v} = i v_x + j v_y + k v_z = i \dot{x} + j \dot{y} + k \dot{z}.$$

Продифференцировав это выражение по  $t$ , получим

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = i \frac{d}{dt}(\dot{x}) + j \frac{d}{dt}(\dot{y}) + k \frac{d}{dt}(\dot{z}).$$

Но  $\frac{d}{dt}(\dot{x})$  есть вторая производная  $x$  по  $t$ , которую можно обозначить символом  $\ddot{x}$ . Аналогично  $\frac{d}{dt}(\dot{y}) = \ddot{y}$ ,  $\frac{d}{dt}(\dot{z}) = \ddot{z}$ . Следовательно,

$$\mathbf{w} = i \ddot{x} + j \ddot{y} + k \ddot{z}. \quad (7.3)$$

Сопоставив (7.3) с формулой (2.8), легко прийти к следующим выражениям для проекций вектора ускорения на координатные оси:

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}. \quad (7.4)$$

## § 8. Прямолинейное равнопеременное движение

При прямолинейном движении вектор скорости все время направлен вдоль одной и той же прямой — траектории, вследствие чего направление вектора  $w$  совпадает с направлением вектора  $v$  или ему противоположно. Если  $w$  совпадает по направлению с  $v$ , то скорость растет по величине и движение будет ускоренным. При  $w$ , противоположном по направлению  $v$ , скорость уменьшается и движение будет замедленным.

Прямолинейное движение с постоянным ускорением называется равнопеременным. В зависимости от поведения скорости со временем различают равномерно-ускоренное и равномерно-замедленное движения.

При равнопеременном движении справедлива формула (7.2), причем все входящие в нее векторы  $v$ ,  $v_0$  и  $w$  направлены вдоль одной и той же прямой. Спроектировав эти векторы на направление  $x$ , совпадающее с направлением вектора  $v_0$ , получим:

$$v_x = v_{0x} + w_x t. \quad (8.1)$$

Проекции  $v_x$ ,  $v_{0x}$  и  $w_x$  равны модулям соответствующих векторов, взятых со знаком «+», если направление вектора совпадает с направлением  $x$ , и взятым со знаком «—», если направление вектора и направление  $x$  противоположны.

Обычно при рассмотрении прямолинейного движения индексы  $x$  в уравнении (8.1) опускают и пишут просто:

$$v = v_0 + w t, \quad (8.2)$$

обращаясь с входящими в уравнение (8.2) величинами как с проекциями векторов. При этом пользуются не вполне строгой (но общепринятой) терминологией, называя, например,  $w$  ускорением и считая ускорение положительным или отрицательным в соответствии с тем, какой знак имеет  $w_x$ . Интегрируя функцию (8.2) в пре-

делах от нуля до произвольного момента времени  $t$ , найдем формулу для пройденного пути (см. (4.4)):

$$s = \int_0^t (v_0 + \omega t) dt = v_0 t + \frac{\omega t^2}{2}, \quad (8.3)$$

где  $\omega$  — величина алгебраическая.

Отметим, что эта формула дает правильный результат для пройденного пути только в том случае, если за время  $t$  направление движения точки (знак скорости) не изменяется.

### § 9. Ускорение при криволинейном движении

Прежде чем приступить к нахождению ускорения в общем случае, рассмотрим простейший случай криволинейного движения — равномерное движение точки по окружности.

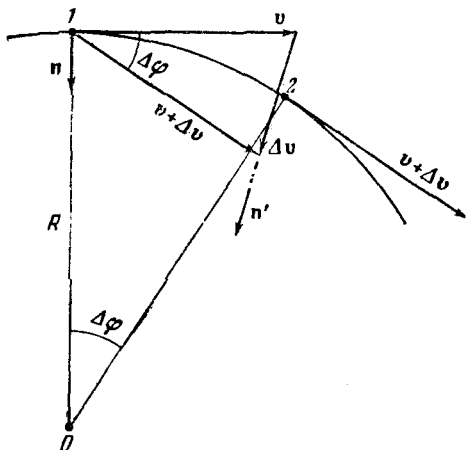


Рис. 24.

Пусть в рассматриваемый момент времени  $t$  точка находится в положении  $1$  (рис. 24). Спустя время  $\Delta t$  точка окажется в положении  $2$ , пройдя путь  $\Delta s$ , равный дуге  $1-2$ . При этом скорость точки  $v$  получает приращение  $\Delta v$ , в результате чего вектор скорости, оставаясь неизменным по величине (при равномерном

движении ( $v = \text{const}$ ), повернется на угол  $\Delta\varphi$ , совпадающий по величине с центральным углом, опирающимся на дугу длиной  $\Delta s$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad (9.1)$$

где  $R$  — радиус окружности, по которой движется точка.

Найдем приращение вектора скорости  $\Delta v$ . Для этого перенесем вектор  $(v + \Delta v)$  так, чтобы его начало совпало с началом вектора  $v$ . Тогда вектор  $\Delta v$  изобразится отрезком, проведенным из конца вектора  $v$  в конец вектора  $(v + \Delta v)$ . Этот отрезок служит основанием равнобедренного треугольника со сторонами  $v$  и  $(v + \Delta v)$  и углом  $\Delta\varphi$  при вершине. Если угол  $\Delta\varphi$  невелик (что выполняется для малых  $\Delta t$ ), для сторон этого треугольника можно приближенно написать:

$$|\Delta v| \cong v \Delta\varphi^1).$$

Вектор  $\Delta v$  можно представить в виде произведения его модуля на единичный вектор такого же направления, как и у  $\Delta v$ . Обозначим этот единичный вектор  $n'$ . Тогда

$$\Delta v = |\Delta v| n' \cong v \Delta\varphi n'.$$

Подставляя сюда  $\Delta\varphi$  из (9.1), получаем:

$$\Delta v \cong v \frac{\Delta s}{R} n'. \quad (9.2)$$

Деля  $\Delta v$  на  $\Delta t$  и делая предельный переход, получим ускорение

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} n'.$$

В этом выражении  $v$  и  $R$  — постоянные; отношение  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  в пределе даст модуль скорости  $v$ ; единичный вектор  $n'$  в пределе сольется с единичным вектором  $n$ , нормальным к окружности в точке  $I$  и направленным к центру. Таким образом,

$$w_n = \frac{v^2}{R} n. \quad (9.3)$$

Найденное нами ускорение направлено по нормали к траектории; его называют нормальным ускоре-

<sup>1)</sup> Нельзя писать  $\Delta v$ . В данном случае  $\Delta v = 0$ .

нием и обозначают  $\omega_n$  (как мы уже поступили в выражении (9.3)). Модуль нормального ускорения

$$\omega_n = \frac{v^2}{R}. \quad (9.4)$$

Чем больше искривлена траектория (чем меньше  $R$  окружности), тем больше  $\omega_n$  при той же величине скорости  $v$ . За меру кривизны принимается величина  $1/R$ , которую называют кривизной окружности.

Очевидно, что ускорение точки, движущейся по произвольной кривой, также будет зависеть от кривизны траектории, которая в разных точках будет различна. В дальнейшем для простоты мы ограничимся рассмотрением только плоских кривых. Кривизна плоской линии в какой-либо ее точке равна кривизне окружности, сливающейся в данном месте с кривой на бесконечно малом ее участке. Такую окружность называют кругом кривизны плоской линии в данной точке. Чтобы получить круг кривизны в точке 1 (рис. 25), нужно поступить следующим образом. Возьмем на кривой точки 2 и 3, близкие к точке 1. Проведем через 1, 2 и 3 окруж-

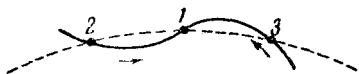


Рис. 25.

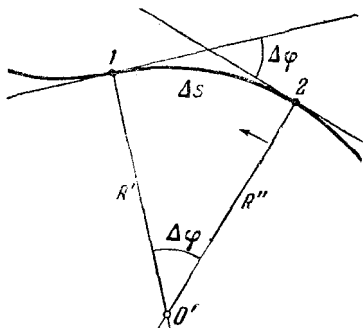


Рис. 26.

ность. Предельное положение этой окружности, получающееся при неограниченном приближении точек 2 и 3 к точке 1, и будет представлять собой круг кривизны. Радиус этого круга дает радиус кривизны линии в точке 1, а центр круга — центр кривизны для точки 1.

Аналитически кривизна кривой  $C$  определяется выражением

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

где  $\Delta \varphi$  — угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на  $\Delta s$  (рис. 26). Таким образом, кривизна характеризуется скоростью изменения

направления кривой, т. е. скоростью поворота касательной при перемещении вдоль кривой. Величина, обратная  $C$ , равна радиусу кривизны  $R$ . Легко убедиться в том, что в случае окружности определенный таким образом радиус кривизны совпадает с радиусом окружности.

Обратимся снова к рис. 26. Построим перпендикуляры к касательным в точках 1 и 2. Эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке  $O'$ , причем расстояния  $R'$  и  $R''$  будут, вообще говоря, неодинаковыми. Образует отношение  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ . Величину  $\Delta s$  можно приближенно заменить через  $R'\Delta\varphi$ . Тогда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \approx \frac{1}{R'}$$

Последнее приближенное равенство выполняется тем точнее, чем ближе точки 1 и 2, т. е. чем меньше  $\Delta s$ . Устремив  $\Delta s$  к нулю, мы получим кривизну:

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{R'}$$

Если точку 2 приближать неограниченно к точке 1, пересечение перпендикуляров  $O'$  будет стремиться к некоторой точке, которая будет представлять собой центр кривизны. Оба расстояния,  $R'$  и  $R''$ , будут стремиться к одному и тому же пределу  $R$ , равному радиусу кривизны. Величина, обратная  $R$ , дает кривизну линии в точке 1.

Теперь найдем ускорение точки, движущейся по произвольной плоской кривой. Разложим вектор приращения скорости  $\Delta\mathbf{v}$  (соответствующий промежутку времени  $\Delta t$ , за который точка перемещается из положения 1 в положение 2) на две составляющие:  $\Delta\mathbf{v}_n$  и  $\Delta\mathbf{v}_\tau$  (рис. 27). Эти составляющие выберем так, чтобы расстояние от точки 1 до конца вектора  $\Delta\mathbf{v}_n$  было равно модулю скорости  $v$  в начальный момент. Тогда, очевидно, модуль вектора  $\Delta\mathbf{v}_\tau$  будет равен приращению модуля скорости:

$$|\Delta\mathbf{v}_\tau| = \Delta|\mathbf{v}| = \Delta v.$$

Введя единичный вектор  $\tau'$ , совпадающий по направлению с вектором  $\Delta\mathbf{v}_\tau$ , последний можно представить в следующем виде:

$$\Delta\mathbf{v}_\tau = \Delta v \tau'. \quad (9.5)$$



Повторив рассуждения, которые привели нас к формуле (9.4), можно получить, что

$$\Delta \mathbf{v}_n = v \frac{\Delta s}{R'} \mathbf{n}'. \quad (9.6)$$

Вектор полного ускорения по определению равен

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t}.$$

С учетом (9.6)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R'} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{n}'.$$

В пределе  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  даст модуль скорости  $v$ ,  $R'$  — радиус кривизны  $R$ , а вектор  $\mathbf{n}'$  совпадет с  $\mathbf{n}$  — единичным

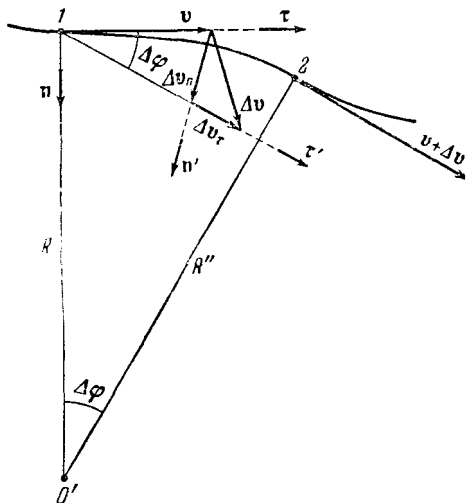


Рис. 27.

вектором нормали к траектории в точке 1. Обозначим этот предел  $\mathbf{w}_n$ :

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (9.7)$$

Второй предел (обозначим его  $\mathbf{w}_\tau$ ) с учетом (9.5) равен

$$\mathbf{w}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \boldsymbol{\tau}'.$$

При переходе к пределу вектор  $\tau'$  совпадает с  $\tau$  — единичным вектором, направленным по касательной к траектории в точке  $l$  в сторону движения и тождественным единичному вектору скорости  $v$  (см. (2.6)):

$$\tau = \frac{v}{v}.$$

Окончательно,

$$w_{\tau} = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \tau = \frac{dv}{dt} \tau. \quad (9.8)$$

Итак, вектор  $w$  может быть представлен в виде суммы двух векторов  $w_n$  и  $w_{\tau}$  (рис. 28), один из которых ( $w_n$ ) перпендикулярен к

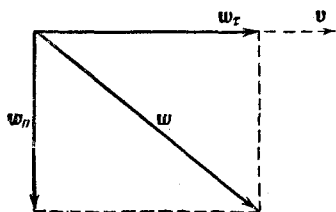


Рис. 28.

вектору скорости  $v$  и направлен к центру кривизны траектории, а второй ( $w_{\tau}$ ) направлен по касательной к траектории. Если скорость растет по величине ( $\frac{dv}{dt}$  положительно), то  $w_{\tau}$  направлен в сторону движения, если скорость по величине убывает ( $\frac{dv}{dt}$  отрицательно), то  $w_{\tau}$  направлен в сторону, противоположную направлению движения.

Вектор  $w_{\tau}$  называют тангенциальным ускорением. Он характеризует изменение скорости по величине. Если скорость по величине не изменяется, тангенциальное ускорение равно нулю и  $w = w_n$ .

Вектор  $w_n$  (нормальное ускорение) характеризует изменение скорости по направлению. Если направление скорости не изменяется, движение происходит по прямой траектории. Кривизна прямой равна нулю (радиус кривизны  $R$  соответственно равен бесконечности), следовательно, нормальное ускорение равно нулю и  $w = w_{\tau}$ .

В общем случае модуль полного ускорения равен (рис. 28):

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_{\tau}^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

## § 10. Кинематика вращательного движения

Все точки абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси  $OO$  (рис. 29), движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Радиус-вектор каждой точки (вектор, проведенный из центра соответствующей окружности в данную точку) поворачивается за время  $\Delta t$  на один и тот же угол  $\Delta\varphi$  — угол поворота твердого тела.

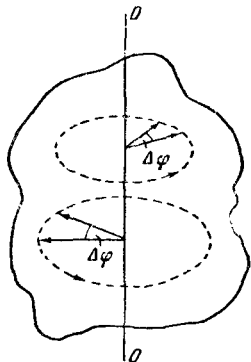


Рис. 29.

Поворот тела на некоторый угол  $\varphi$  можно задать в виде отрезка, длина которого равна  $\varphi$ , а направление совпадает с осью, вокруг которой совершен поворот. Для того чтобы указать, в какую сторону совершается поворот вокруг данной оси, можно условиться связывать направления поворота и изображающего его отрезка так называемым

правилом правого винта. Согласно этому правилу направление отрезка должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него (рис. 30), мы видели поворот совершающимся по часовой стрелке (вращая головку правого винта по часовой стрелке, мы вызовем его перемещение от себя). Таким образом, повороту тела можно приписать численное значение и направление. Однако этого еще недостаточно для того, чтобы поворот можно было считать вектором, — нужно, чтобы изображаемые таким способом повороты складывались по правилу параллелограмма. Для поворотов произвольной величины последнее условие не выполняется. Покажем это на примере вращения сферы (рис. 31). Поворот сферы вокруг оси  $1-1$  на угол  $\pi/2$  (этот поворот изображен отрезком  $\varphi_1$ ) и следующий за ним поворот вокруг оси  $2-2$  на  $\pi/2$  (отрезок  $\varphi_2$ ) приводят к тому, что точка сферы  $A$  перемещается сначала в положение  $A'$ , а затем

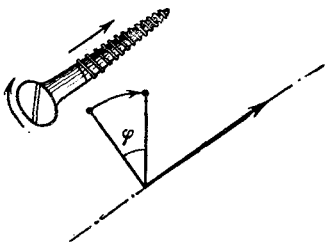


Рис. 30.

правилом параллелограмма. Для поворотов произвольной величины последнее условие не выполняется. Покажем это на примере вращения сферы (рис. 31). Поворот сферы вокруг оси  $1-1$  на угол  $\pi/2$  (этот поворот изображен отрезком  $\varphi_1$ ) и следующий за ним поворот вокруг оси  $2-2$  на  $\pi/2$  (отрезок  $\varphi_2$ ) приводят к тому, что точка сферы  $A$  перемещается сначала в положение  $A'$ , а затем

в положение  $A''$ . Поворот, который изображается полученным из  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  по правилу параллелограмма отрезком

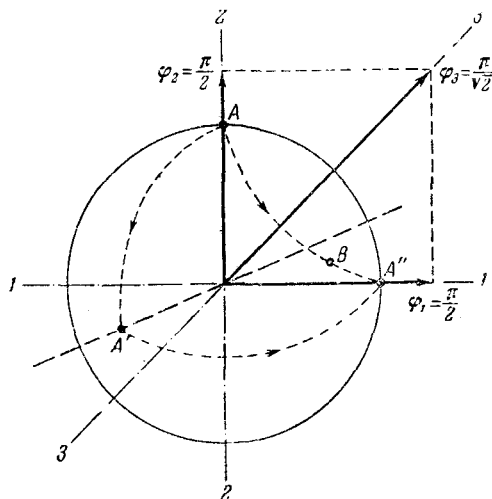


Рис. 31.

ком  $\varphi_3$  (этот отрезок имеет длину  $\pi/\sqrt{2}$ ), переводит точку  $A$  в положение  $B$ , не совпадающее с  $A''$ . Следова-

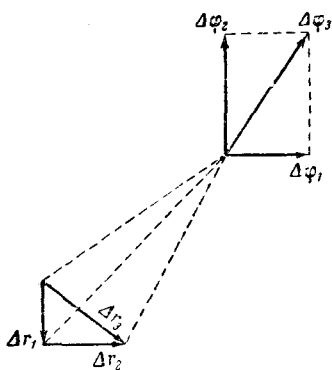


Рис. 32.

тельно, поворот, изображаемый отрезком  $\varphi_3$ , вовсе не равнозначен поворотам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , совершаемым один за другим, и поэтому не является их суммой. Таким образом, мы убедились в том, что, хотя поворот тела вокруг оси можно изобразить направленным отрезком, его нельзя считать вектором.

Иначе обстоит дело для очень малых углов поворота  $\Delta\varphi$ . Путь, проходимый любой точкой тела при

очень малом повороте, можно считать прямолинейным. Два совершаемых последовательно малых поворота  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$  обуславливают, как видно из рис. 32, такое же

перемещение  $\Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2$  любой точки тела, как и поворот  $\Delta \varphi_3$ , получаемый из  $\Delta \varphi_1$  и  $\Delta \varphi_2$  по правилу параллелограмма. Отсюда следует, что очень малые повороты могут рассматриваться как векторы (мы будем их записывать в виде  $\Delta \varphi$  или  $d\varphi$ ).

Направление вектора  $d\varphi$  мы определили, связав его определенным образом с направлением вращения тела. При рассмотрении таких величин, как скорость  $\mathbf{v}$ , ускорение  $\mathbf{w}$ , радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , не возникал вопрос о выборе их направления: оно вытекало естественным образом из природы самих величин. Подобные векторы называются полярными. Векторы типа  $d\varphi$ , направление которых связывается с направлением вращения (или обхода), называют аксиальными векторами.

Векторная величина

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (10.1)$$

(где  $\Delta t$  — время, за которое совершается поворот  $\Delta \varphi$ ) называется угловой скоростью тела<sup>1)</sup>. Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  направлен вдоль оси, вокруг которой вращается тело в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 33), и представляет собой аксиальный вектор.

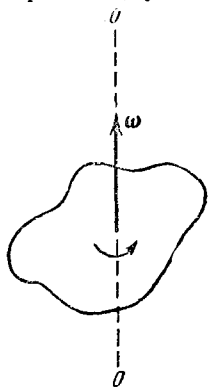


Рис. 33.

Модуль вектора угловой скорости равен  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным, при этом  $\omega = \varphi/t$ . Таким образом, при равномерном вращении  $\omega$  показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения  $T$ , под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т. е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Поскольку промежутку времени  $\Delta t = T$  соответствует угол поворота  $\Delta \varphi = 2\pi$ ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (10.2)$$

<sup>1)</sup> Чтобы отличить рассмотренную нами ранее скорость  $\mathbf{v}$  от угловой скорости, ее называют линейной. В дальнейшем в случаях, когда это не сможет привести к недоразумениям, слово «линейная» мы будем опускать.

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.3)$$

Число оборотов в единицу времени  $\nu$ , очевидно, равно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (10.4)$$

Из (10.4) следует, что угловая скорость равна  $2\pi$ , умноженным на число оборотов в единицу времени:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (10.5)$$

Понятия периода обращения и числа оборотов в единицу времени можно сохранить и для неравномерного вращения, понимая под мгновенным значением  $T$  то время, за которое тело совершило бы один оборот, если бы оно вращалось равномерно с данным мгновенным значением угловой скорости, а под  $\nu$  понимая то число оборотов, которое совершало бы тело за единицу времени при аналогичных условиях.

Вектор  $\omega$  может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (в этом случае он изменяется по величине), так и за счет поворота оси вращения в пространстве (в этом случае  $\omega$  изменяется по направлению). Пусть за время  $\Delta t$  вектор  $\omega$  получает приращение  $\Delta\omega$ . Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величиной

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad (10.6)$$

которую называют угловым ускорением. Вектор  $\beta$ , как и  $\omega$ , является аксиальным.

Когда направление оси вращения в пространстве остается постоянным, угловая скорость изменяется только по величине и  $|\Delta\omega| = |\Delta\omega|$ . В этом случае из (10.6) получается следующее выражение для модуля углового ускорения:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|. \quad (10.7)$$

Если под  $\beta$  понимать проекцию вектора  $\beta$  на направление  $\omega$ , то формула (10.7) запишется следующим образом:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (10.8)$$

В формуле (10.8)  $\beta$  — алгебраическая величина, которая положительна, если  $\omega$  со временем увеличивается (в этом случае векторы  $\beta$  и  $\omega$  имеют одинаковое направление), и отрицательна, если  $\omega$  уменьшается (в этом случае направления  $\beta$  и  $\omega$  противоположны).

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости  $v$ . Скорость каждой из точек, будучи направлена по касательной к соответствующей окружности, непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости  $v$  определяется скоростью вращения тела  $\omega$  и расстоянием  $R$  рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  тело повернулось на угол  $\Delta\varphi$  (рис. 34). Точка, находящаяся на расстоянии  $R$  от оси, проходит при этом путь  $\Delta s$ , равный

$$\Delta s = R \Delta\varphi.$$

Линейная скорость точки по определению будет равна

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \\ &= R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega, \end{aligned}$$

т. е.

$$v = \omega R. \quad (10.9)$$

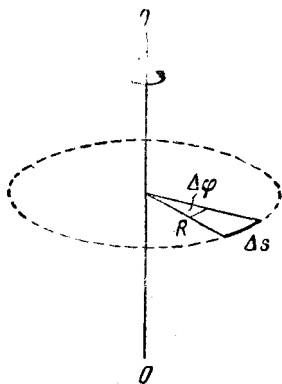


Рис. 34.

Итак, чем дальше отстоит точка от оси вращения, тем с большей линейной скоростью она движется.

Найдем линейное ускорение точек вращающегося тела. Нормальное ускорение согласно (9.4) равно

$$\omega_n = \frac{v^2}{R}.$$

Подставляя в это выражение  $v$  из (10.9), находим, что

$$\omega_n = \omega^2 R. \quad (10.10)$$

Модуль тангенциального ускорения в соответствии с (9.8) равен  $\left| \frac{dv}{dt} \right|$ . Воспользовавшись опять уравнением

(10.9), получаем:

$$\begin{aligned} \omega_{\tau} &= \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = \\ &= \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\beta, \end{aligned}$$

т. е.

$$\omega_{\tau} = \beta R. \quad (10.11)$$

Таким образом, как нормальное, так и тангенциальное ускорение растет линейно с  $R$  — расстоянием точки от оси вращения.

## § 11. Связь между векторами $v$ и $\omega$

Кроме рассмотренных ранее операций сложения и вычитания векторов, а также умножения вектора на скаляр (см. § 2), существуют также операции перемножения векторов. Два вектора можно умножить друг на друга двумя способами: первый способ дает в результате некоторый новый вектор, второй — приводит к скалярной величине. Отметим, что операции деления вектора на вектор не существует.

Сейчас мы рассмотрим векторное произведение векторов. Скалярное произведение векторов мы введем позднее, когда оно нам понадобится.

Векторным произведением двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называется вектор  $\mathbf{C}$ , обладающий следующими свойствами:

1) модуль вектора  $\mathbf{C}$  равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла  $\alpha$  между ними (рис. 35):

$$C = AB \sin \alpha;$$

2) вектор  $\mathbf{C}$  перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , причем направление его связано с направлениями  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  по правилу правого винта: если смотреть вслед вектору  $\mathbf{C}$ , то совершаемый по кратчайшему пути поворот от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке.

Символически векторное произведение можно записать двумя способами:

$$[\mathbf{AB}] \quad \text{или} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$



Мы будем пользоваться первым из этих способов, причем иногда для облегчения чтения формул будем ставить запятую между сомножителями. Не следует применять одновременно косой крест и квадратные скобки:  $[A \times B]$ . Недопустима запись такого вида:  $[AB] = AB \sin \alpha$ . Слева здесь стоит вектор, справа — модуль этого вектора, т. е. скаляр. Справедливо следующее равенство:

$$|[AB]| = AB \sin \alpha. \quad (11.1)$$

Поскольку направление векторного произведения определяется направлением вращения от первого сомножителя ко второму, результат векторного перемножения двух векторов зависит от порядка сомножителей. Изменение порядка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное (рис. 35)

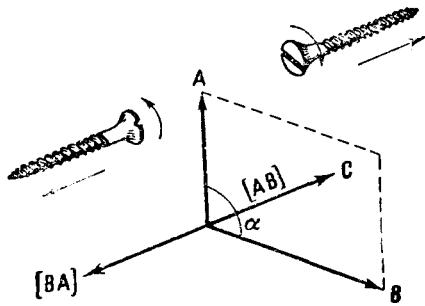


Рис. 35.

$$[BA] = -[AB]$$

или

$$B \times A = -(A \times B).$$

Таким образом, векторное произведение не обладает свойством коммутативности.

Можно доказать, что векторное произведение дистрибутивно, т. е. что

$$[A, (B_1 + B_2 + \dots + B_N)] = [AB_1] + [AB_2] + \dots + [AB_N]. \quad (11.2)$$

Векторное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов есть аксиальный вектор. Векторное произведение аксиального вектора на полярный (или наоборот) будет, однако, вектором полярным. Изменение условия, определяющего направление аксиальных векторов, на обратное приведет в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед одним из сомножителей. В итоге величина, выражаемая векторным произведением, остается без изменений.

Модулю векторного произведения можно дать простую геометрическую интерпретацию: выражение  $AB \sin \alpha$  численно равно площади параллелограмма,

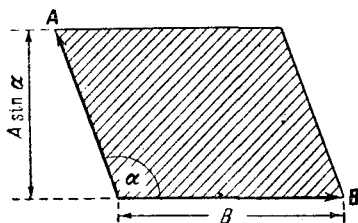


Рис. 36.

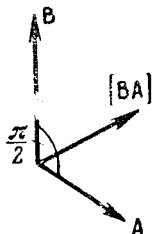


Рис. 37.

построенного на векторах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 36; вектор  $\mathbf{C} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]$  направлен в этом случае перпендикулярно к плоскости чертежа, за чертеж).

Пусть векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны (рис. 37). Образует двойное векторное произведение этих векторов:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{A}, [\mathbf{B}\mathbf{A}]],$$

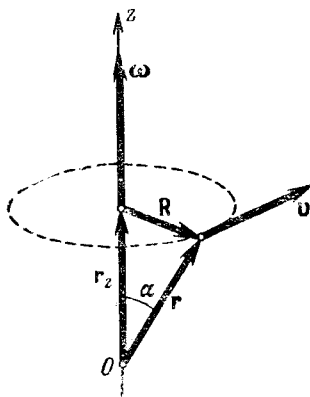


Рис. 38.

т. е. умножим векторно  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{A}$ , а затем умножим векторно  $\mathbf{A}$  на вектор, получившийся в результате первого умножения. Вектор  $[\mathbf{B}\mathbf{A}]$  имеет модуль, равный  $BA$  ( $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ), и образует с векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  углы, равные  $\pi/2$ . Следовательно, модуль вектора  $\mathbf{D}$  равен  $|\mathbf{A}| \cdot |[\mathbf{B}\mathbf{A}]| = A \cdot BA = A^2B$ . Направление же вектора  $\mathbf{D}$ , как легко видеть из рис. 37, совпадает с направлением век-

тора  $\mathbf{B}$ . Это дает нам основание написать следующее равенство:

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}\mathbf{A}]] = A^2\mathbf{B}. \quad (11.3)$$

Формулой (11.3) мы будем в дальнейшем пользоваться неоднократно. Подчеркнем, что она справедлива

только в том случае, когда векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны.

Уравнение (10.9) устанавливает связь между модулями векторов  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ . С помощью векторного произведения может быть написано выражение, дающее соотношение между самими векторами. Пусть тело вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  (рис. 38). Легко видеть, что векторное произведение  $\boldsymbol{\omega}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки, скорость  $\mathbf{v}$  которой мы хотим найти, представляет собой вектор, совпадающий по направлению с вектором  $\mathbf{v}$  и имеющий модуль, равный  $\omega r \sin \alpha = \omega R$ , т. е.  $v$  [см. формулу (10.9)]. Таким образом, векторное произведение  $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$  и по направлению и по модулю равно вектору  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \quad (11.4)$$

Формуле (11.4) можно придать иной вид. Для этого представим радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в виде суммы двух составляющих — вектора  $\mathbf{r}_z$ , параллельного оси  $z$ , и вектора  $\mathbf{R}$ , перпендикулярного к оси  $z$ :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_z + \mathbf{R}$  (см. рис. 38). Подставив это выражение в формулу (11.4) и воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения [см. (11.2)], получим:

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_z + \mathbf{R})] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_z] + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}].$$

Векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}_z$  коллинеарны. Поэтому их векторное произведение равно нулю ( $\sin \alpha = 0$ ). Следовательно, можно написать, что

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]. \quad (11.5)$$

В дальнейшем, при рассмотрении вращательного движения, мы всегда будем обозначать через  $\mathbf{R}$  перпендикулярную к оси вращения составляющую радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из точки, взятой на оси. Модуль этого вектора дает расстояние  $R$  точки от оси.

## ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## § 12. Классическая механика. Границы ее применимости

Кинематика дает описание движения тел, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется именно так (например, равномерно по окружности, или равномерно-ускоренно по прямой), а не иначе.

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения.

В основе так называемой классической или ньютоновской механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 г.

Законы Ньютона (как и все остальные физические законы) возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Правильность их (хотя и для очень обширного, но все же ограниченного круга явлений) подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают.

Ньютоновская механика достигла в течение двух столетий таких огромных успехов, что многие физики XIX столетия были убеждены в ее всемогуществе. Считалось, что объяснить любое физическое явление означает свести его к механическому процессу, подчиняющемуся законам Ньютона. Однако с развитием науки обнаружилось новые факты, которые не укладывались в рамки классической механики. Эти факты получили свое объяснение в новых теориях — специальной теории относительности и квантовой механике.

В специальной теории относительности, созданной Эйнштейном в 1905 г., подверглись радикальному пере-

смотрю ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привел к созданию «механики больших скоростей» или, как ее называют, релятивистской механики. Новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики в пределе (для скоростей, малых по сравнению со скоростью света) переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как ее частный случай и сохранила свое прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями, значительно меньшими скорости света.

Аналогично обстоит дело и с соотношением между классической и квантовой механикой, возникшей в 20-х годах нашего века в результате развития физики атома. Уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс больших по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла и в квантовую механику в качестве ее предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало ее ограниченную применимость. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

### **§ 13. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета**

Первый закон Ньютона формулируется следующим образом: *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.* Оба названных состояния отличаются тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: скорость любого тела остается постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения.

Следует отметить, что тел, не подвергающихся в той или иной степени воздействию со стороны других тел,

в природе не существует. В наблюдаемых на практике случаях покоя или равномерного и прямолинейного движения мы имеем дело с телами, воздействия на которые уравнивают друг друга. Например, книга, лежащая на столе, испытывает воздействие (притяжение) со стороны Земли, а также воздействие (давление) со стороны стола, причем оба эти воздействия уравнивают друг друга, в результате чего книга покоится.

Утверждение, содержащееся в первом законе, является отнюдь не очевидным. До Галилея (1564—1642) считали, что воздействие необходимо не для изменения скорости, а для поддержания ее неизменной. Это мнение основывалось на таких известных из повседневной жизни фактах, как необходимость толкать непрерывно тележку, катящуюся по ровной горизонтальной дороге, для того, чтобы ее движение не замедлялось. Теперь мы знаем, что, толкая тележку, мы уравниваем воздействие, оказываемое на нее трением. Однако, если этого не сознавать в достаточной степени, легко прийти к выводу, что воздействие обуславливает скорость, а не ее изменение (т. е. ускорение).

Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Мы уже отмечали, что характер движения зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Если относительно одной из них тело покоится, то относительно другой оно, очевидно, будет двигаться с ускорением. Следовательно, первый закон Ньютона не может выполняться одновременно в обеих системах.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной. Сам закон называют иногда законом инерции. Система отсчета, в которой первый закон Ньютона не выполняется, называется неинерциальной системой отсчета. Инерциальных систем существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной. Подробнее об этом будет сказано в § 17.

Опытным путем установлено, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, яв-

ляется инерциальной. Эта система называется гелиоцентрической системой отсчета (гелиос — по-гречески солнце). Любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной.

Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной. Но иногда неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, оказывает существенное влияние на характер рассматриваемых относительно нее механических явлений. Некоторые из таких случаев мы рассмотрим впоследствии.

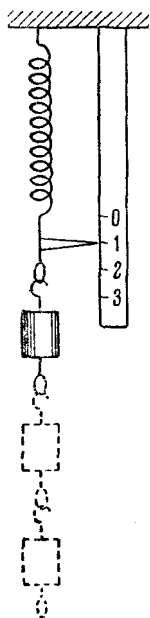
## § 14. Второй закон Ньютона

Во втором законе Ньютона фигурируют две новые физические величины: сила и масса. Сила дает количественную характеристику и направление воздействия, оказываемого на данное тело со стороны других тел. Масса дает количественную характеристику «отзывчивости» тела на эти воздействия.

Как уже отмечалось, воздействие, оказываемое на некоторое тело, может вызвать явления двоякого рода: изменить скорость тела или вызвать его деформацию (т. е. изменение его размеров и формы). Поскольку оба эти эффекта (и ускорение, и деформация) поддаются измерению, любой из них может быть использован для количественной оценки воздействий, т. е. для сравнения и измерения сил.

Рассмотрим следующий эксперимент. Возьмем пружину, закрепленную неподвижно в верхнем конце. К нижнему концу пружины подвесим какой-либо груз (рис. 39). Под воздействием этого груза (и того тела, к которому прикреплен верхний конец пружины) она получит некоторое удлинение, в результате чего указатель, прикрепленный к пружине, сместится на неподвижной

шкале от отметки 0 до отметки 1. Подберем несколько грузов, одинаковых в том отношении, что каждый из них, взятый в отдельности, вызывает одинаковое удлинение пружины. Тогда можно утверждать, что каждый из этих грузов, будучи подвешен к пружине, оказывает на нее одинаковое воздействие, которое можно охарактеризовать как действие на конец пружины силы определенной величины.



Теперь подвесим к пружине сразу два таких груза. Каждый из них оказывает воздействие, одинаковое не только по величине, но и по направлению. Очевидно, что в этом случае сила, действующая на пружину будет в 2 раза больше. Как показывает опыт, и удлинение пружины в этом случае оказывается в 2 раза больше. Три равных груза вызывают при одновременном воздействии утроенную деформацию пружины и т. д.

Следовательно, удлинение пружины пропорционально действующей на нее силе. Правда, этот закон, носящий название закона Гука, справедлив только в случае не слишком больших деформаций. Когда величина деформации превышает некоторый, определенный для каждой конкретной пружины предел, пропорциональность между силой и деформацией

Рис. 39.

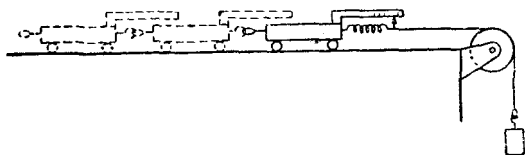


Рис. 40.

перестает соблюдаться<sup>1)</sup>. Таким образом, мы получили способ количественного сравнения сил: отношение величин двух сил равно отношению упругих деформаций пружины, вызываемых действием этих сил.

<sup>1)</sup> Деформация, подчиняющаяся закону Гука, называется упругой деформацией.



Установив способ измерения сил, исследуем, как зависит ускорение тела от величины действующей на него силы. Для этого продумаем следующий опыт (рис. 40). Будем изучать движение тележки на гладком горизонтальном столе под действием нити, натянутой грузом. Между тележкой и нитью вставим пружину, по растяжению которой можно оценивать силу воздействия. Направление воздействия, очевидно, задается направлением нити. Подвешивая к нити разные грузы, можно варьировать силу, под действием которой происходит движение.

Подобный опыт дает следующий результат: если натяжение пружины не изменяется, тележка движется равномерно-ускоренно, причем ускорение  $\omega$  пропорционально приложенной силе  $f$ :

$$\omega \sim f. \quad (14.1)$$

Следует иметь в виду, что наличие трения между колесиками тележки и осью, а также колесиками и столом будет искажать полученный результат. Но по мере уменьшения трения мы все больше будем приближаться к соотношению (14.1). Установленная закономерность дает в наше распоряжение еще один способ количественного сравнения сил: отношение двух сил  $f_1$  и  $f_2$  можно пайти, определив ускорения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , приобретаемые каким-либо телом под действием этих сил:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (14.2)$$

Если взять другую тележку, то, хотя характер движения и соотношение между силой и ускорением для нее останутся теми же, ускорение ее при той же величине силы  $f$ , вообще говоря, будет иным. Это объясняется различной «неподатливостью» тележек действию силы или, как говорят, их различной инертностью.

При любой по величине и направлению силе отношение величины силы  $f$  к величине сообщаемого ею ускорения  $\omega$  остается для данного тела постоянным<sup>1)</sup>. Для разных тел это отношение оказывается различным. Очевидно, что величина отношения  $f/\omega$  характеризует

<sup>1)</sup> Это справедливо только в случае, если скорость тела мала по сравнению со скоростью света в пустоте (см. § 22).

инертность данного тела. Поэтому для количественной характеристики инертности тела применяется пропорциональная отношению  $f/w$  физическая величина, получившая название массы тела. Обозначив массу тела буквой  $m$ , можно написать:

$$m \sim \frac{f}{w}. \quad (14.3)$$

Определенная таким образом масса является мерой инертности тела. Из соотношения (14.3) вытекает способ сравнения масс: отношение масс двух тел  $m_1$  и  $m_2$  равно обратному отношению ускорений  $w_1$  и  $w_2$ , сообщаемых этим телам равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_2}{w_1}. \quad (14.4)$$

Возьмем несколько тележек, одинаковых в том отношении, что ускорения, сообщаемые им равными силами, одинаковы по величине (предполагается, что трение пренебрежимо мало). Такие тележки обладают равными массами. Соединим две тележки друг с другом (см. рис. 40). Опыт дает, что ускорение двух соединенных тележек, приобретаемое под действием некоторой силы  $f$ , в два раза меньше, чем ускорение каждой из тележек, взятой в отдельности. Если соединить три одинаковые тележки, ускорение оказывается в три раза меньше, и т. д. Отсюда вытекает, что масса обладает свойством аддитивности; это означает, что масса составного тела равна сумме масс отдельных его частей<sup>1)</sup>.

Запишем выражение (14.3) в виде

$$w = k \frac{f}{m}, \quad (14.5)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Соотношение (14.5) представляет собой аналитическое выражение второго закона Ньютона.

Итак, второй закон Ньютона формулируется следующим образом: *ускорение всякого тела прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе тела*. Он, так же как первый закон Ньютона, справедлив только в инерциальных системах отсчета.

<sup>1)</sup> Утверждение об аддитивности массы является справедливым лишь в рамках ньютоновской механики. В релятивистской механике аддитивность массы не имеет места.

В частном случае силы, равной нулю (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел), ускорение, как следует из (14.5), также будет равно нулю, что совпадает с утверждением первого закона Ньютона. Поэтому первый закон, казалось бы, входит во второй как его частный случай. Несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, так как в нем по сути заключен постулат (утверждение) о существовании инерциальных систем отсчета.

Воздействие одних тел на другие имеет направленный характер. Следовательно, и сила является величиной, характеризующейся, кроме численного значения, также и направлением. Но этого еще не достаточно для

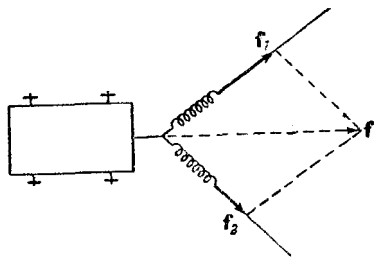


Рис. 41.

того, чтобы отнести силу к категории векторов. Необходимо выяснить, какому закону сложения подчиняются силы. Для этого проделаем опыт с тележкой, находящейся под действием двух натянутых нитей (рис. 41, вид на тележку сверху). Опыт дает, что ускорение тележки под действием сил  $f_1$  и  $f_2$  имеет такую же величину и направление, как и в случае действия лишь одной силы  $f$ , получающейся из сил  $f_1$  и  $f_2$  по правилу сложения векторов. Следовательно, сила есть векторная величина.

Поскольку сила есть вектор и направление ускорения совпадает с направлением силы, уравнение (14.5) можно написать в векторном виде

$$\mathbf{w} = k \frac{\mathbf{f}}{m}. \quad (14.6)$$

Масса  $m$  и коэффициент пропорциональности  $k$  — скалярные величины. Уравнение (14.6) является основным уравнением классической механики.

## § 15. Единицы измерения и размерности физических величин

Законы физики, как уже отмечалось, устанавливают количественные соотношения между физическими величинами. Для установления таких соотношений

необходимо иметь возможность измерять различные физические величины.

Измерить какую-либо физическую величину (например, скорость) означает сравнить ее с величиной того же вида (во взятом примере со скоростью) принятой за единицу.

Вообще говоря, для каждой физической величины можно было бы установить единицу измерения произвольно, независимо от других. Однако оказывается, что можно ограничиться произвольным выбором единиц измерения для трех (в принципе любых) величин, принятых за основные. Единицы же измерения всех прочих величин можно установить на основании трех основных, воспользовавшись для этой цели физическими законами, связывающими соответствующую величину с основными величинами или с величинами, для которых единицы уже установлены подобным образом.

Поясним сказанное следующим примером. Предположим, что мы уже установили единицы измерения для массы и ускорения. Соотношение (14.5) связывает закономерным образом эти величины с третьей физической величиной — силой. Выберем единицу измерения силы так, чтобы коэффициент пропорциональности в этом уравнении был равен единице. Тогда (14.5) принимает более простой вид:

$$\omega = \frac{f}{m}. \quad (15.1)$$

Из (15.1) следует, что установленная единица силы представляет собой такую силу, под действием которой тело с массой, равной единице, получает ускорение, равное также единице (подстановка в (15.1)  $f = 1$  и  $m = 1$  дает  $\omega = 1$ ).

При указанном способе выбора единиц измерения физические соотношения принимают более простой вид. Сама же совокупность единиц измерения образует определенную систему.

Существует несколько систем, отличающихся выбором основных единиц. Системы, в основу которых положены единицы длины, массы и времени, называются абсолютными.

В СССР введен с 1 января 1963 г. государственный стандарт ГОСТ 9867-61, устанавливающий применение

Международной системы единиц, обозначаемой символом СИ. Эта система единиц должна применяться как предпочтительная во всей области науки, техники и народного хозяйства, а также при преподавании. Основными единицами СИ являются: единица длины — метр (сокращенное обозначение *м*), единица массы — килограмм (*кг*) и единица времени — секунда (*сек*). Таким образом, СИ принадлежит к числу абсолютных систем. Кроме указанных трех единиц, СИ принимает в качестве основных единицу силы тока — ампер (*а*), единицу термодинамической температуры — градус Кельвина ( $^{\circ}\text{К}$ ) и единицу силы света — свечу (*св*). Об этих единицах будет речь в соответствующих разделах курса.

Метр определяется как длина, равная 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона  $86^1$ ) (оранжевая линия криптона-86). Метр приблизительно равен  $\frac{1}{40\,000\,000}$  доле длины земного меридиана. Применяются также кратные и дольные единицы: километр (1000 *м*), сантиметр ( $1/100$  *м*), миллиметр ( $1/1000$  *м*), микрон ( $1/1\,000\,000$  *м*) и т. д.

Килограмм представляет собой массу платино-иридиевого<sup>2)</sup> тела, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре (близ Парижа). Это тело называется международным прототипом килограмма. Масса прототипа близка к массе  $1000\text{ см}^3$  чистой воды при  $4^{\circ}\text{С}$ . Грамм равен  $1/1000$  килограмма.

Секунда определяется как  $1/31556925,9747$  часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени<sup>3)</sup>. Секунда приблизительно равна  $1/86\,400$  средних солнечных суток.

---

<sup>1)</sup> Смысл этих обозначений разъясняется в разделе «Атомная физика».

<sup>2)</sup> Сплав платины с иридием обладает большой твердостью и коррозионной устойчивостью (т. е. мало подвержен химическому воздействию окружающей среды).

<sup>3)</sup> То есть для 12 часов 31 декабря 1899 г. Эфемеридным временем называется равномерно текущее время, которое может быть найдено путем внесения поправок на неравномерность вращения Земли вокруг своей оси. Ссылка на 1900 г. объясняется тем, что тропический год уменьшается примерно на  $0,5\text{ сек}$  за столетие.

В физике применяется также абсолютная система единиц, называемая СГС-системой. Основными единицами в этой системе является сантиметр, грамм и секунда.

Единицы введенных нами в кинематике величин (скорости и ускорения) являются производными от основных единиц. Так, за единицу скорости принимается скорость равномерно движущегося тела, проходящего в единицу времени (секунду) путь, равный единице длины (метру или сантиметру). Обозначается эта единица  $м/сек$  в СИ и  $см/сек$  в СГС-системе. За единицу ускорения принимается ускорение равномерно-переменного движения, при котором скорость тела за единицу времени (секунду) изменяется на единицу (на  $м/сек$  или  $см/сек$ ). Обозначается эта единица  $м/сек^2$  в СИ и  $см/сек^2$  в СГС-системе.

Единица силы в СИ называется ньютоном ( $н$ ). Согласно (15.1) ньютон равен силе, под действием которой тело с массой  $1 кг$  получает ускорение  $1 м/сек^2$ . Единица силы в СГС-системе называется диной ( $дин$ ). Одна дина равна силе, под действием которой тело с массой  $1 г$  получает ускорение  $1 см/сек^2$ . Между ньютоном и диной имеется следующее соотношение:

$$1 н = 1 кг \cdot 1 м/сек^2 = 10^3 г \cdot 10^2 см/сек^2 = 10^5 дин.$$

В технике широко применялась система МКГСС (называемая обычно технической системой единиц). Основными единицами этой системы являются метр, единица силы — килограмм-сила ( $кгс$  или  $кГ$ ) и секунда. Килограмм-сила определяется как сила, сообщаящая массе в  $1 кг$  ускорение, равное  $9,80655 м/сек^2$ . Из этого определения следует, что  $1 кгс = 9,80655 н$  (приблизительно  $9,81 н$ ). За единицу массы в системе МКГСС согласно (15.1) должна быть принята масса такого тела, которое под действием силы в  $1 кгс$  получает ускорение  $1 м/сек^2$ . Эта единица обозначается  $кгс \cdot сек^2/м$ , специального названия она не имеет. Очевидно, что  $1 кгс \cdot сек^2/м = 9,80655 кг$  (приблизительно  $9,81 кг$ ).

Из способа построения систем единиц следует, что изменение основных единиц влечет за собой изменение производных единиц. Если, например, за единицу времени принять вместо секунды минуту, т. е. увеличить

единицу времени в 60 раз, то единица скорости уменьшится в 60 раз, а единица ускорения уменьшится в 3600 раз.

Соотношение, показывающее, как изменяется единица измерения какой-либо величины при изменении основных единиц, называется размерностью этой величины. Для обозначения размерности произвольной физической величины используется ее буквенное обозначение, взятое в квадратные скобки. Так, например, символ  $[v]$  означает размерность скорости. Для размерностей основных величин используются специальные обозначения: для длины  $L$ , для массы  $M$  и для времени  $T$ . Таким образом, обозначив длину буквой  $l$ , массу буквой  $m$  и время буквой  $t$ , можно написать:

$$[l] = L; \quad [m] = M; \quad [t] = T.$$

В указанных обозначениях размерность произвольной физической величины имеет вид  $L^\alpha M^\beta T^\gamma$  ( $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  могут быть как положительными, так и отрицательными, в частности они могут равняться нулю). Эта запись означает, что при увеличении единицы длины в  $n_1$  раз единица данной величины увеличивается в  $n_1^\alpha$  раз (соответственно число, которым выражается значение величины в этих единицах, уменьшается в  $n_1^\alpha$  раз); при увеличении единицы массы в  $n_2$  раз единица данной величины увеличивается в  $n_2^\beta$  раз и, наконец, при увеличении единицы времени в  $n_3$  раз единица данной величины увеличивается в  $n_3^\gamma$  раз.

Поскольку физические законы не могут зависеть от выбора единиц измерения фигурирующих в них величин, размерности обеих частей уравнений, выражающих эти законы, должны быть одинаковы. Это условие может быть использовано, во-первых, для проверки правильности полученных физических соотношений и, во-вторых, для установления размерностей физических величин. Так, например, скорость определяется как  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Размерность  $\Delta s$  равна  $L$ , размерность  $\Delta t$  равна  $T$ . Размерность правой части написанного соотношения равна  $[\Delta s]/[\Delta t] = L/T = LT^{-1}$ . Размерность левой части должна быть такой же. Следовательно,

$$[v] = LT^{-1}. \quad (15.2)$$

Написанное соотношение называется формулой размерности, а его правая часть — размерностью соответствующей величины (в данном случае скорости).

На основании соотношения  $w = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  можно установить размерность ускорения

$$[w] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

Размерность силы

$$[f] = [m][w] = MLT^{-2}.$$

Аналогично устанавливаются размерности всех прочих величин.

### § 16. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело  $M_1$  действует на тело  $M_2$  с некоторой силой  $f_{21}$ , то и тело  $M_2$  в свою очередь действует на тело  $M_1$  с силой  $f_{12}$ .

Как показывает опыт, силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, оказываются

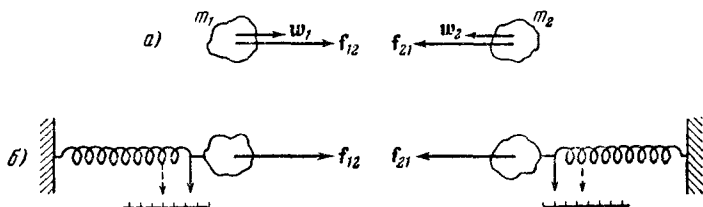


Рис. 42.

всегда равными по величине и противоположными по направлению. Рассмотрим следующий пример. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$ , изолированные от действия внешних тел, притягивают (или отталкивают) друг друга вследствие того, например, что несут на себе электрические заряды (рис. 42). Под действием сил  $f_{12}$  и  $f_{21}$  тела приобретают ускорения  $w_1$  и  $w_2$  соответственно. Величина этих ускорений оказывается обратной массам тел:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_{12}}{m_1},$$



откуда следует равенство  $m_1\omega_1 = m_2\omega_2$ , а следовательно, и равенство сил  $f_{12} = f_{21}$ . Направления сил, очевидно, противоположны.

К тому же результату можно прийти, сопоставляя не ускорения тел, а растяжения калиброванных пружин, с помощью которых можно «привязать» взаимодействующие тела к неподвижным опорам (рис. 42, б). В этом случае силы  $f_{12}$  и  $f_{21}$ , измеренные по деформации пружин, также оказываются одинаковыми по величине.

Третий закон Ньютона является обобщением опытных фактов подобного рода. В формулировке самого Ньютона он гласит: «действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — действия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны». В этой формулировке фигурируют термины «действие» и «противодействие», вследствие чего может возникнуть представление о каком-то различии сил, с которыми тела действуют друг на друга. «Действию» невольно отводится главенствующая, а «противодействию» — подчиненная роль. На самом деле обе силы  $f_{12}$  и  $f_{21}$  являются совершенно равноправными. Поэтому третий закон Ньютона лучше формулировать следующим образом: *всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, всегда равны по величине и противоположны по направлению*. Используя обозначения сил, примененные на рис. 42, содержание третьего закона можно записать в следующем виде:

$$f_{12} = -f_{21}. \quad (16.1)$$

Из сказанного следует, что силы всегда возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным.

## § 17. Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью  $v_0$ . Одну из этих систем, обозначенную на рис. 43 буквой  $K$ , будем условно считать неподвижной. Тогда вторая система  $K'$

будет двигаться прямолинейно и равномерно. Выберем координатные оси  $x, y, z$  системы  $K$  и оси  $x', y', z'$  системы  $K'$ , так, чтобы оси  $x$  и  $x'$  совпадали, а оси  $y$  и  $y'$ , а также  $z$  и  $z'$  были параллельны друг другу.

Найдем связь между координатами  $x, y, z$  некоторой точки  $P$  в системе  $K$  и координатами  $x', y', z'$  той же точки в системе  $K'$ . Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпали, то, как следует из рис. 43,  $x = x' + v_0 t$ . Кроме того, очевидно, что  $y = y'$  и  $z = z'$ . Добавив к этим

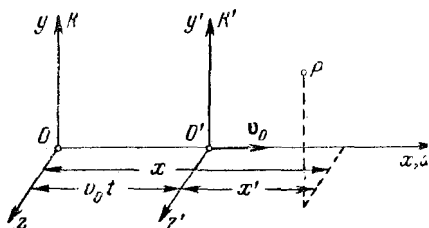


Рис. 43.

соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, т. е. что  $t = t'$ , получим совокупность четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + v_0 t', \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t', \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

называемых преобразованиями Галилея.

Первое и последнее из соотношений (17.1) оказываются справедливыми лишь при значениях  $v_0$ , малых по сравнению со скоростью света в пустоте, которую мы будем обозначать буквой  $c$  ( $v_0 \ll c$ ). При  $v_0$ , сравнимых с  $c$ , преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца, о которых будет идти речь в «Оптике» [см. т. III, формулы (37.10)]. В рамках классической механики формулы (17.1) предполагаются точными.

Продифференцировав соотношения (17.1) по времени, найдем связь между скоростями точки  $P$  по отношению

к системам отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' + v_0 & \text{или} & & v_x &= v'_x + v_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}' & \text{или} & & v_y &= v'_y, \\ \dot{z} &= \dot{z}' & \text{или} & & v_z &= v'_z. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Три скалярных соотношения (17.2) эквивалентны следующему соотношению между вектором скорости  $\mathbf{v}$  по отношению к системе  $K$  и вектором скорости  $\mathbf{v}'$  по отношению к системе  $K'$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \quad (17.3)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно спроектировать векторное равенство (17.3) на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В результате получатся формулы (17.2).

Формулы (17.2) и (17.3) дают правило сложения скоростей в классической механике. Следует иметь в виду, что соотношение (17.3), как и любое другое векторное соотношение, остается справедливым при произвольном выборе взаимных направлений координатных осей систем  $K$  и  $K'$ . Соотношения же (17.2) выполняются только при выборе осей, показанном на рис. 43.

В § 13 отмечалось, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной. Теперь мы имеем возможность доказать это утверждение. Для этого продифференцируем по времени соотношение (17.3). Учтя, что  $\mathbf{v}_0$  постоянна, получим:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}'. \quad (17.4)$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Поэтому, если одна из этих систем инерциальна (это значит, что при отсутствии сил  $\mathbf{w} = 0$ ), то и остальные будут инерциальными ( $\mathbf{w}'$  также равно нулю).

Основное уравнение механики (14.6) характерно тем, что из кинематических величин оно содержит только ускорение, скорость же в него не входит. Однако, как мы установили выше, ускорение какого-либо тела в двух произвольно выбранных инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$  одинаково. Отсюда согласно второму закону Ньютона вытекает, что силы, действующие на тело

в системах  $K$  и  $K'$ , также будут одинаковы. Следовательно, *уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой*, т. е. как говорят, инвариантны по отношению к преобразованию координат, соответствующему переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Находясь, например, в вагоне поезда, движущегося без толчков прямолинейно и равномерно, мы, не выглянув в окно, не сможем определить, движется вагон или покоится. Свободное падение тел, движение брошенных нами тел и все другие механические процессы будут в этом случае происходить так же, как и в случае, если бы вагон был неподвижен.

Указанные обстоятельства были выяснены еще Галилеем. Положение о том, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно, носит название принципа относительности Галилея.

## § 18. Сила тяжести и вес

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое принято обозначать буквой  $g$ . Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массы  $m$  действует сила

$$\mathbf{P} = mg, \quad (18.1)$$

называемая силой тяжести<sup>1)</sup>. Когда тело покоится относительно поверхности Земли, сила  $\mathbf{P}$  уравновешивается

<sup>1)</sup> Вследствие неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей, сила тяжести несколько отличается от силы, с которой тело притягивается Землей. Подробнее об этом будет сказано в § 47.

вается реакцией<sup>1)</sup>  $f_r$  подвеса или опоры, удерживающих тело от падения ( $f_r = -P$ ). По третьему закону Ньютона тело в этом случае действует на подвес или опору с силой  $G$ , равной  $-f_r$ , т. е. с силой

$$G = P = mg.$$

Сила  $G$ , с которой тело действует на подвес или опору, называется весом тела. Эта сила равна  $mg$  лишь в том случае, если тело и опора (или подвес) неподвижны относительно Земли. В случае их движения с некоторым ускорением  $w$  вес  $G$  не будет равен  $mg$ . Это можно уяснить на следующем примере. Пусть подвес в виде укрепленной на рамке пружины движется

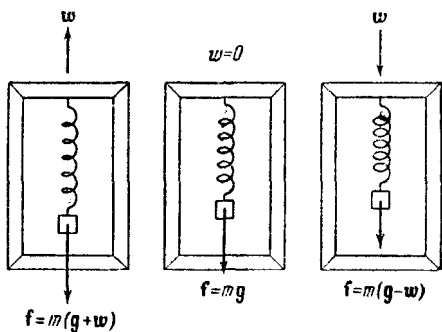


Рис. 44.

вместе с телом с ускорением  $w$  (рис. 44). Тогда уравнение движения тела будет иметь вид:

$$P + f_r = mw, \quad (18.2)$$

где  $f_r$  — реакция подвеса, т. е. сила, с которой пружина действует на тело. По третьему закону Ньютона тело действует на пружину с силой, равной  $-f_r$ , которая по определению представляет собой вес тела  $G$  в этих условиях. Заменив в (18.2) реакцию  $f_r$  силой  $-G$ , а силу тяжести  $P$  — произведением  $mg$ , получим:

$$G = m(g - w). \quad (18.3)$$

<sup>1)</sup> Реакциями называются силы, с которыми на данное тело действуют тела, ограничивающие его движение.

Формула (18.3) определяет вес тела в общем случае. Она справедлива для подвеса или опоры любого вида.

Предположим, что тело и подвес движутся в вертикальном направлении (в этом предположении выполнен рис. 44).

Спроектируем (18.3) на направление отвеса:

$$G = m(g \pm w). \quad (18.4)$$

В этом выражении  $G$ ,  $g$  и  $w$  суть модули соответствующих векторов. Знак «+» соответствует  $w$ , направленному вверх, знак «—» соответствует направлению  $w$  вниз.

Из формулы (18.4) вытекает, что по модулю вес  $G$  может быть как больше, так и меньше, чем сила тяжести  $P$ . При свободном падении рамки с подвесом  $w = g$  и сила  $G$ , с которой тело действует на подвес, равна нулю. Наступает состояние невесомости. Космический корабль, летящий вокруг Земли с выключенными двигателями, движется, как и свободно падающая рамка, с ускорением  $g$ , вследствие чего тела внутри корабля находятся в состоянии невесомости — они не оказывают давления на соприкасающиеся с ними тела.

Отметим, что часто путают силу тяжести  $P$  и вес тела  $G$ . Это обусловлено тем, что в случае неподвижной опоры силы  $P$  и  $G$  совпадают по величине и по направлению (обе они равны  $mg$ ). Однако следует помнить, что эти силы приложены к разным телам:  $P$  приложена к самому телу,  $G$  приложена к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле сил земного тяготения. Кроме того, сила  $P$  всегда равна  $mg$ , независимо от того, движется тело или покоится, сила же веса  $G$  зависит от ускорения, с которым движутся опора и тело, причем она может быть как больше, так и меньше  $mg$ , в частности, в состоянии невесомости она обращается в нуль.

Соотношение (18.3) между массой и весом тела дает способ сравнения масс тел путем взвешивания — отношение весов тел, определенных в одинаковых условиях (обычно при  $w = 0$ ) в одной и той же точке земной поверхности, равно отношению масс этих тел:

$$G_1 : G_2 : G_3 : \dots = m_1 : m_2 : m_3 : \dots$$

Как будет показано в § 47, ускорение свободного падения  $g$  и сила тяжести  $P$  зависят от широты местности. Кроме того,  $P$  и  $g$  зависят также от высоты над уровнем моря — с удалением от центра Земли они уменьшаются.

## § 19. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним; трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) носит название внутреннего трения.

Силу трения, возникающую при движении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к категории сил внутреннего трения, поскольку в этом случае слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, вовлекаются им в движение с той же скоростью, какую имеет тело, и на движение тела оказывает влияние трение между этими и внешними по отношению к ним слоями среды.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например смазки между ними, называется сухим. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется вязким (или жидким).

Применительно к сухому трению различают трение скольжения и трение качения.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев). Если, например, два слоя жидкости скользят друг по другу, двигаясь с различной скоростью, то сила, приложенная к более быстро движущемуся слою, направлена в сторону, противоположную движению, а сила, действующая на слой, движущийся медленнее, направлена в сторону движения слоя.

**Сухое трение.** В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое

скольжение. В последнем случае она называется силой трения покоя. Рассмотрим два соприкасающихся тела 1 и 2, из которых последнее закреплено неподвижно (рис. 45). Тело 1 прижимается к телу 2 силой  $f_n$ , направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Она называется силой нормального давления и может быть обусловлена весом тела или другими причинами.

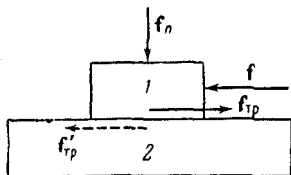


Рис. 45.

Попробуем переместить тело 1, подействовав на него внешней силой  $f$ . При этом обнаружится, что для каждой конкретной пары тел и каждого значения силы нормального давления имеется определенное минимальное значение  $f_0$  силы  $f$ , при котором тело 1 удастся сдвинуть с места. При значениях внешней силы, заключенных в пределах  $0 < f < f_0$ , тело остается в покое. По второму закону Ньютона это возможно в том случае, если сила  $f$  уравновешивается равной ей по величине и противоположно направленной силой, которая и есть сила трения покоя  $f_{тр}$  (см. рис. 45). Она автоматически<sup>1)</sup> принимает значение, равное величине внешней силы  $f$  (при условии, что последняя не превосходит  $f_0$ ). Легко видеть, что  $f_0$  представляет собой наибольшее значение силы трения покоя.

Отметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона на тело 2 также действует сила трения покоя  $f'_{тр}$  (на рис. 45 показана пунктиром), равная по величине силе  $f_{тр}$ , но имеющая противоположное ей направление.

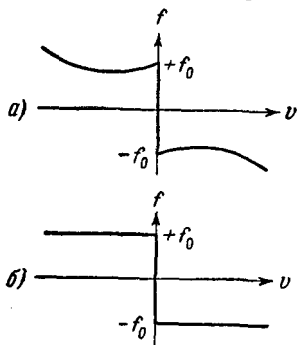


Рис. 46.

<sup>1)</sup> Это происходит подобно тому, как пружина под действием растягивающей силы «автоматически» приобретает такое удлинение, при котором упругая сила точно уравновешивает внешнюю силу.



Если внешняя сила  $f$  превзойдет по величине  $f_0$ , тело начинает скользить, причем его ускорение определяется результирующей двух сил: внешней  $f$  и силы трения скольжения  $f_{\text{тр}}$ , величина которой в той или иной мере зависит от скорости скольжения. Характер этой зависимости определяется природой и состоянием трущихся поверхностей. Чаще всего встречающийся вид зависимости силы трения от скорости показан на рис. 46 (по осям отложены проекции силы трения и скорости на направление, вдоль которого происходит скольжение; обе эти проекции имеют, очевидно, противоположные знаки). График охватывает как случай покоя, так и случай скольжения. Сила трения покоя, как уже отмечалось, может иметь значения в пределах от нуля до  $f_0$ , что отражено на графике вертикальным отрезком. Сила трения скольжения с увеличением скорости вначале несколько убывает, причем так, что при стремлении  $v$  к нулю ее величина стремится к  $f_0$ . При дальнейшем увеличении скорости она начинает возрастать.

В случаях, когда состояние и природа поверхностей не изменяются<sup>1)</sup>, сила трения скольжения оказывается практически не зависящей от скорости и равной максимальному значению силы трения покоя  $f_0$  (рис. 46, б).

Законы сухого трения сводятся к следующему: максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от величины поверхности соприкосновения трущихся тел и оказываются приблизительно пропорциональными величине силы нормального давления  $f_n$ , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$f_{\text{тр}} = k f_n. \quad (19.1)$$

Независимость силы трения от величины поверхности соприкосновения наглядно обнаруживается на следующем примере. Если тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда (форму кирпича) и прижимается к другому телу только под действием веса, то величина максимальной силы трения (или силы трения скольжения, взятой при одной и той же скорости) не зависит от

<sup>1)</sup> Изменение поверхностей может происходить за счет сглаживания шероховатостей при скольжении, окисления поверхностей из-за нагрева и т. п.

того, какой гранью это тело трется о другую поверхность.

Безразмерный коэффициент пропорциональности  $k$  в уравнении (19.1) называют коэффициентом трения (соответственно покоя или скольжения). Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, в частности от их шероховатости. В случае скольжения коэффициент трения является функцией скорости.

Чтобы дать представление о величине коэффициента трения, приведем значения коэффициента трения покоя для некоторых материалов.

Таблица 1

Материал	$k$
Металл по металлу (без смазки) . . . . .	0,15–0,25
Металл по дереву . . . . .	0,5
Дерево по дереву . . . . .	0,65
Кожа по металлу . . . . .	0,6

Силы трения играют очень большую роль в природе. В нашей повседневной жизни трение нередко оказывается полезным. Вспомним огромные затруднения, которые испытывают пешеходы и транспорт во время гололедицы, когда трение между покрытием дороги и подошвами пешеходов или колесами транспорта значительно уменьшается. Не будь сил трения, мебель пришлось бы прикреплять к полу, как на судне во время качки, ибо она при малейшей негоризонтальности пола сползала бы в направлении покатости. Читатель может сам привести аналогичные примеры.

Во многих случаях роль трения крайне отрицательна и приходится принимать меры к тому, чтобы по возможности его ослабить. Так обстоит, например, дело с трением в подшипниках или с трением между втулкой колеса и осью.

Наиболее радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом, катящимся по плоской или изогнутой поверхности. Трение качения пол-

чиняется формально тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньшим.

**Вязкое трение и сопротивление среды.** В отличие от сухого вязкое трение характерно тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Поэтому, как бы ни была мала внешняя сила, она может сообщить относительную скорость слоям вязкой среды. Законы, которым подчиняются силы трения между слоями среды, будут рассмотрены в главе, посвященной механике жидкостей.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением сил трения между твердым телом и вязкой (жидкой или газообразной) средой. Следует иметь в виду, что, помимо собственно сил трения, при движении тел в жидкой или газообразной среде возникают так называемые силы сопротивления среды, которые могут быть гораздо значительнее, чем силы трения. Не имея возможности рассматривать подробно причины возникновения этих сил, мы ограничимся изложением закономерностей, которым подчиняются силы трения и сопротивления среды совместно, причем условно будем называть суммарную силу силой трения. Вкратце эти закономерности сводятся к следующему.

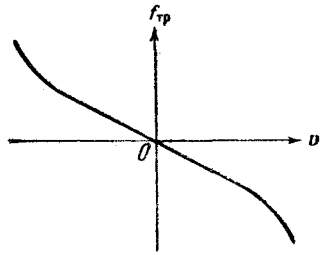


Рис. 47.

Величина силы трения зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности, скорости по отношению к среде и от свойства среды, называемого вязкостью. Типичная зависимость силы трения от скорости тела по отношению к среде показана графически на рис. 47. При сравнительно небольших скоростях сила трения растет линейно со скоростью:

$$f_{\text{тр}} = -k_1 v, \tag{19.2}$$

где знак «—» означает, что сила трения направлена в сторону, противоположную скорости.

При больших скоростях линейный закон переходит в квадратичный, т. е. сила трения начинает расти

пропорционально квадрату скорости:

$$\mathbf{f}_{\text{тр}} = -k_2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (19.3)$$

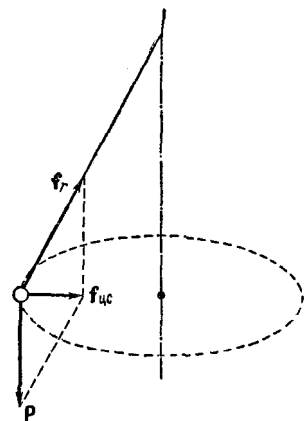
Величина коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  (их можно назвать коэффициентами трения) в сильной степени зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от вязких свойств среды. Например, для глицерина они оказываются гораздо большими, чем для воды. Значение скорости, при которой закон (19.2) переходит в (19.3), оказывается зависящим от тех же причин.

## § 20. Силы, действующие при криволинейном движении

Как было показано в § 9, ускорение при криволинейном движении можно представить в виде суммы двух составляющих — нормального  $\mathbf{w}_n$  и тангенциального  $\mathbf{w}_\tau$  ускорений. В соответствии с этим и силу, действующую на тело, можно разложить на нормальную  $\mathbf{f}_n$  и тангенциальную  $\mathbf{f}_\tau$  составляющие. Нормальная составляющая силы обуславливает изменение скорости по направлению, не изменяя ее величины; тангенциальная составляющая изменяет скорость по величине и не изменяет ее направления. Отсюда вытекает важное следствие: если сила, действующая на тело, в каждый момент времени оказывается перпендикулярной к скорости тела, скорость, изменяясь по направлению, остается постоянной по величине. При условии, что сила, кроме того, остается постоянной по величине, нормальное ускорение  $v^2/R$  ( $R$  — радиус кривизны траектории) также будет неизменно по величине и тело будет двигаться по траектории постоянной кривизны, т. е. по окружности.

При равномерном движении по окружности ускорение тела и действующая на него сила все время направлены («устремлены») к центру окружности, поэтому

Рис. 48.



их называют центростремительным ускорением и центростремительной силой.

На практике центростремительное ускорение обычно бывает обусловлено одновременным воздействием на движущееся тело нескольких тел. В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности тела, находящегося под воздействием силы тяжести  $\mathbf{P}$  и реакции натянутой нити  $\mathbf{f}_r$  (рис. 48). Здесь центростремительная сила  $\mathbf{f}_{цс}$  является результирующей сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{f}_r$ .

## § 21. Практическое применение законов Ньютона

Уравнение второго закона Ньютона, написанное в векторной форме, устанавливает в общем виде связь между силой, массой тела и его ускорением. Чтобы осуществить вычисления, нужно, перейти от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранные направления. При этом пользуются следующими свойствами проекций:

- 1) равные векторы имеют одинаковые проекции;
- 2) проекция вектора, получающегося умножением какого-то другого вектора на скаляр, равна произведению проекции этого второго вектора на скаляр;
- 3) проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых векторов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  прикреплены к концам нерастяжимой, невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 49). Нить может скользить по желобку блока практически без трения. Найти силу натяжения нити и ускорение тел.

Каждое из тел находится под воздействием двух сил: силы тяжести  $\mathbf{P}$  и реакции нити  $\mathbf{f}_r$  (рассмотрение ведем в системе отсчета, связанной с Землей, считая ее инерциальной). Напишем для обоих тел уравнение второго

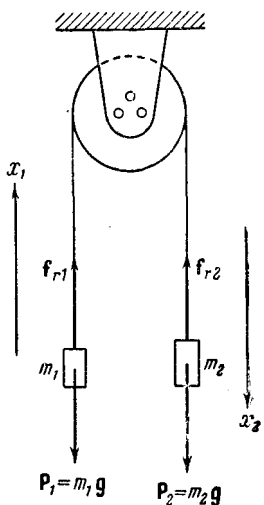


Рис. 49.

закона:

$$\left. \begin{aligned} P_1 + f_{r1} &= m_1 w_1, \\ P_2 + f_{r2} &= m_2 w_2. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

В связи с тем, что нить невесома и скользит по блоку без трения, ее натяжение по всей длине одинаково. Поэтому обе силы реакции имеют одинаковый модуль  $f_r$ . Вследствие нерастяжимости нити ускорения обоих тел равны по величине  $w_1 = w_2 = w$ .

Проектируя первое из уравнений (21.1) на направление  $x_1$  (рис. 49), а второе — на направление  $x_2$ , получаем систему

$$\left. \begin{aligned} f_r - P_1 &= m_1 w, \\ P_2 - f_r &= m_2 w. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Решая систему уравнений (21.2) относительно неизвестных  $f_r$  и  $w$ , получаем:

$$w = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g,$$

$$f_r = \frac{P_1 m_2 + P_2 m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Если  $m_2 > m_1$ , то  $w$  положительно, т. е. ускорение первого тела  $w_1$  направлено вверх, а ускорение второго тела  $w_2$  направлено вниз. При  $m_2 < m_1$  направления обоих

ускорений меняются на противоположные. В случае  $m_1 = m_2$  тела движутся без ускорений (или покоятся).

Зная ускорение, легко найти по формуле (8.2) и скорость тел.

**Пример 2.** Тело массы  $m$  подвешено к концу нерастяжимой нити длиной  $l$  (рис. 50). Точка крепления нити к опоре движется относительно Земли с постоянным ускорением  $w$ , образуя угол  $\alpha$  с горизонтом. Найти отклонение нити от вертикали (угол  $\varphi$ ) и силу  $f$ , с которой тело действует на нить.

Тело будет двигаться с таким же ускорением  $w$ , как и точка крепления нити к опоре. Следовательно, урав-

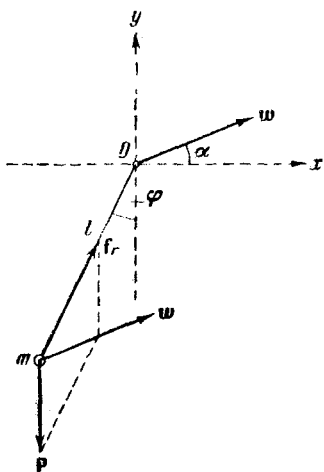


Рис. 50.

нение второго закона для тела имеет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{f}_r = m\mathbf{w}.$$

Спроектировав векторы, входящие в это уравнение, на координатные оси  $x$  и  $y$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} P_x + f_{rx} &= m\omega_x, \\ P_y + f_{ry} &= m\omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

Из рис. 50 видно, что

$$P_x = 0, \quad P_y = -P = -mg;$$

$$f_{rx} = f_r \sin \varphi = f \sin \varphi;$$

$$f_{ry} = f_r \cos \varphi = f \cos \varphi;$$

$$\omega_x = \omega \cos \alpha; \quad \omega_y = \omega \sin \alpha$$

(искомая сила  $\mathbf{f}$  и сила  $\mathbf{f}_r$  равны по величине).

Подставим значения проекций в (21.3):

$$0 + f \sin \varphi = m\omega \cos \alpha,$$

$$-mg + f \cos \varphi = m\omega \sin \alpha.$$

Решая эту систему уравнений относительно  $\varphi$  и  $f$ , получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \cos \alpha}{g + \omega \sin \alpha},$$

$$f = m \sqrt{g^2 + 2g\omega \sin \alpha + \omega^2}. \quad (21.4)$$

При  $\alpha = \pm \pi/2$  («+» соответствует направлению  $\mathbf{w}$  вверх, «-» — направлению  $\mathbf{w}$  вниз) формула (21.4) переходит в уже знакомую нам формулу (18.4).

## § 22. Импульс

Уравнению второго закона Ньютона

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \quad (22.1)$$

можно придать другой вид. Учтя, что масса  $m$  в классической механике есть величина постоянная, ее можно внести под знак производной и записать (22.1) следующим образом:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{f}.$$

Векторную величину

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (22.2)$$

называют импульсом материальной точки<sup>1)</sup>). Воспользовавшись определением импульса, уравнение второго закона можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \quad (22.3)$$

а сам закон сформулировать так: *производная импульса материальной точки по времени равна результирующей всех сил, действующих на точку.*

Уравнение (22.3) справедливо в более широких пределах, чем уравнение (22.1). Как устанавливает теория относительности, масса тела является функцией скорости: с увеличением скорости масса растет. Правда, зависимость массы от скорости такова<sup>2)</sup>, что при скоростях значительно меньших скорости света, масса остается практически постоянной. Однако при больших скоростях масса начинает быстро расти, вследствие чего уравнение (22.1) становится неприменимым. В то же время уравнение (22.3) остается справедливым и при этих условиях. Таким образом, уравнение (22.3) сохраняет свое значение и в релятивистской механике (см. § 12).

Умножив (22.3) на  $dt$ , приходим к соотношению:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{f} dt. \quad (22.4)$$

интегрирование которого дает приращение импульса за промежуток времени, протекший от момента  $t_1$  до момента  $t_2$ :

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} dt. \quad (22.5)$$

---

<sup>1)</sup> Прежде вместо термина «импульс» пользовались термином «количество движения».

<sup>2)</sup> Эта зависимость имеет вид

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $m$  — масса тела в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью  $v$ ,  $m_0$  — масса покоя, т. е. масса при  $v = 0$ ,  $c$  — скорость света в пустоте.



В частности, если  $\mathbf{f} = \text{const}$ , формула (22.5) дает для приращения импульса за промежуток времени  $\tau$  значение:  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{f}\tau$ .

Заметим, что из выражения (22.3) следует, что, выяснив, как импульс изменяется со временем, можно установить силу, действующую на тело.

### § 23. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  материальных точек (для краткости будем называть ее системой тел). Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, можно подразделить на внутренние и внешние. Внутренними мы будем называть силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела системы, внешними — силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется замкнутой.

Импульсом системы  $\mathbf{p}$  называется векторная сумма импульсов тел, образующих систему,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

Назовем центром инерции системы точку, положение которой в пространстве задается радиусом-вектором  $\mathbf{r}_c$ , определяемым следующим образом:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (23.1)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -го тела,  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, определяющий положение этого тела в пространстве,  $m$  — масса системы.

Декартовы координаты центра инерции равны проекциям  $\mathbf{r}_c$  на координатные оси:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (23.2)$$

Отметим, что центр инерции совпадает с центром тяжести системы<sup>1)</sup>.

Скорость центра инерции получается путем дифференцирования  $\mathbf{r}_c$  по времени:

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{m}$$

Учитывая, что  $m_i \mathbf{v}_i$  есть  $\mathbf{p}_i$ , а  $\sum \mathbf{p}_i$  дает импульс системы  $\mathbf{p}$ , можно написать

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}_c. \quad (23.3)$$

Таким образом, импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

Пусть система состоит из трех тел (рис. 51). Каждой из внутренних сил, например  $\mathbf{f}_{12}$ , т. е. силе, с которой на тело 1 воздействует тело 2, соответствует сила  $\mathbf{f}_{21}$ , с которой тело 1 воздействует на тело 2, причем по третьему закону Ньютона  $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$ . Символами  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  и  $\mathbf{F}_3$  обозначены результирующие всех сил, с которыми внешние тела воздействуют соответственно на 1-е, 2-е и 3-е тело системы.

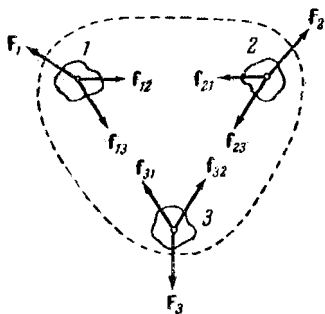


Рис. 51.

Напишем для каждого из трех тел уравнение (22.3)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{F}_3.$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма внутренних сил будет равна нулю, вследствие чего

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \quad (23.4)$$

При отсутствии внешних сил получается, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = 0,$$

следовательно, для замкнутой системы  $\mathbf{p}$  постоянен.

<sup>1)</sup> Это справедливо только в однородном поле сил тяжести (см. § 41).

Этот результат легко обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тел  $N$ . Пользуясь сокращенной записью сумм, уравнение (22.3) для всех  $N$  тел можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (23.5)$$

Выражение (23.5) представляет собой систему  $N$  уравнений, отличающихся друг от друга значением индекса  $i$ . Суммирование в каждом из этих уравнений производится по индексу  $k$ , причем в  $i$ -м уравнении индекс  $k$  пробегает все значения от 1 до  $N$ , кроме значения  $k = i$ .

Складывая эти уравнения, с учетом того, что  $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki}$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (23.6)$$

Следовательно, производная по времени от вектора импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.

Для замкнутой системы правая часть соотношения (23.6) равна нулю, вследствие чего  $\mathbf{p}$  не зависит от времени. Это утверждение представляет собой содержание закона сохранения импульса, который формулируется следующим образом: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Отметим, что импульс остается постоянным и для системы, подверженной внешним воздействиям, при условии, что внешние силы, действующие на тела системы, в сумме дают нуль. Если даже сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление есть нуль, то составляющая импульса в этом направлении будет постоянной. Действительно, спроектировав все величины уравнения (23.6) на произвольное направление  $x$  и учитывая, что

$$\left( \frac{d}{dt} \mathbf{p} \right)_{\text{пр } x} = \frac{d}{dt} p_x \text{ } ^1),$$

<sup>1)</sup> См. формулы (2.11).

получим:

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^N F_{xi}, \quad (23.7)$$

откуда и вытекает высказанное нами утверждение.

В соответствии с (23.3) из закона сохранения импульса вытекает, что центр инерции замкнутой системы тел либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

Можно назвать много явлений, в основе которых лежит закон сохранения импульса. Находясь, например, на скользком полу, невозможно сдвинуть с места какой-либо предмет без того, чтобы самому не начать скользить в противоположном направлении. Действие ракет (и реактивных двигателей) основано на том, что в результате выбрасывания из сопла ракеты струи образующихся при сгорании топлива газов ракете сообщается такой же по величине импульс, какой уносят с собой газы.

# ГЛАВА III

## РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

### § 24. Работа

Пусть тело, на которое действует сила  $\mathbf{f}$ , проходит, двигаясь по некоторой траектории, путь  $s$ . При этом сила либо изменяет скорость тела, сообщая ему ускорение, либо компенсирует действие другой силы (или сил), противодействующей движению. Действие  $\mathbf{f}$  на пути  $s$  характеризуется величиной, которая называется работой.

Работой называется скалярная величина, равная произведению проекции силы на направление перемещения  $f_s$  и пути  $s$ , проходимого точкой приложения силы:

$$A = f_s s. \quad (24.1)$$

Выражение (24.1) справедливо в том случае, если величина проекции силы  $f_s$  на направление перемещения (т. е. на направление скорости) остается все время неизменной. В частности, это имеет место, когда тело движется прямолинейно и постоянная по величине сила  $f$  образует с направлением движения постоянный угол  $\alpha$ . Поскольку  $f_s = f \cos \alpha$ , выражению (24.1) можно придать следующий вид:

$$A = fs \cos \alpha. \quad (24.2)$$

Работа — алгебраическая величина. Если сила и направление перемещения образуют острый угол ( $\cos \alpha > 0$ ), работа положительна. Если угол  $\alpha$  — тупой ( $\cos \alpha < 0$ ), работа отрицательна. При  $\alpha = \pi/2$  работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно

отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно, а тем более для того, чтобы перенести этот груз по горизонтальному пути, носильщик

затрачивает много усилий, т. е. «совершает работу». Однако работа как механическая величина в этих случаях равна нулю.

Если величина проекции силы на направление перемещения не остается постоянной во время движения, для вычисления работы следует разбить путь  $s$  на элементарные участки  $\Delta s$ , взяв их столь малыми, чтобы за

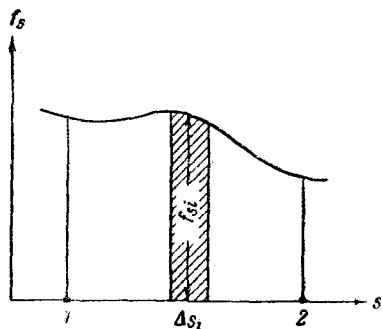


Рис. 52.

время прохождения телом такого участка величину  $f_s$  можно было считать почти неизменной. Тогда работа силы на каждом элементарном участке приближенно равна

$$\Delta A \cong f_s \Delta s,$$

а работа на всем пути  $s$  может быть вычислена как сумма элементарных работ:

$$A = \sum \Delta A_i \cong \sum f_{s_i} \Delta s_i. \quad (24.3)$$

При устремлении всех  $\Delta s_i$  к нулю приближенное равенство (24.3) перейдет в строгое равенство:

$$A = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum f_{s_i} \Delta s_i = \int_s f_s ds^1). \quad (24.4)$$

На рис. 52 построен график  $f_s$  как функции положения точки на траектории (горизонтальную ось можно назвать осью  $s$ , длина отрезка этой оси между точками 1

<sup>1)</sup> Ход рассуждений в данном случае точно такой, как и при выводе формулы для пути, пройденного при неравномерном движении (см. § 4).

и 2 равна полной длине пути). Из рисунка видно, что элементарная работа  $\Delta A_i$  численно равна площади заштрихованной полоски, а работа  $A$  на пути от точки 1 до точки 2 численно равна площади фигуры, ограниченной кривой  $f_s$ , вертикальными прямыми 1 и 2 и осью  $s$ .

Найдем работу, совершаемую при растяжении пружины, подчиняющейся закону Гука. Растяжение будем производить медленно, чтобы силу, с которой мы действуем на пружину, можно было считать все время равной по величине упругой силе  $f = kx$ , где  $x$  — удлинение пружины. Сила действует в направлении перемещения,

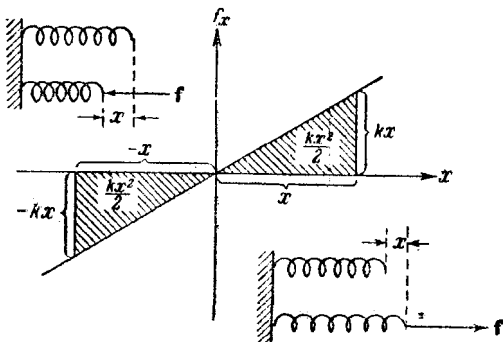


Рис. 53.

так что  $f_x = f$ . Путь, проходимый точкой приложения силы, равен  $x$  (рис. 53). Как следует из рис. 53, работа, которую нужно совершить, чтобы вызвать удлинение пружины  $x$ , равна

$$A = \frac{kx^2}{2}. \quad (24.5)$$

При сжатии пружины на величину  $x$  совершается такая же по величине и знаку работа, как и при растяжении. Проекция силы  $f_x$  в этом случае отрицательна (сила, действующая на пружину, направлена влево,  $x$  растет вправо (см. рис. 53)), все  $\Delta x$  тоже отрицательны, вследствие чего  $f_x \Delta x$  положительно.

Отметим, что работа упругой силы, т. е. силы, действующей со стороны пружины на деформирующее ее тело, и при растяжении, и при сжатии равна  $-kx^2/2$ ; так как упругая сила в каждый момент времени равна по

величине, но противоположна по направлению силе, вызывающей деформацию.

**Единицы работы.** В качестве единицы работы служит работа, совершаемая силой, равной единице и действующей в направлении перемещения, на пути, равном единице:

1) в СИ единицей работы является джоуль (*дж*), который равен работе, совершаемой силой в 1 ньютон на пути в 1 метр;

2) в СГС-системе — эрг, равный работе, совершаемой силой в 1 дину на пути в 1 сантиметр;

3) в МКГСС-системе — килограммометр (*кгс·м*), равный работе, совершаемой силой в 1 *кгс* на пути в 1 метр.

Между единицами работы имеются соотношения:

$$1 \text{ дж} = 1 \text{ н} \cdot 1 \text{ м} = 10^5 \text{ дин} \cdot 10^2 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг};$$

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 1 \text{ кгс} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ н} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ дж}.$$

**Скалярное произведение векторов.** Выражение для работы может быть представлено в виде скалярного произведения вектора силы и вектора перемещения.

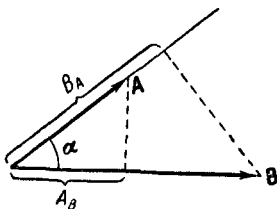


Рис. 54.

Скалярным произведением двух векторов **A** и **B** называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла  $\alpha$  между ними (рис. 54). Символически скалярное произведение записывается в виде **AB**, без какого-либо знака между символами векторов<sup>1)</sup>.

Итак, скалярное произведение по определению равно

$$\mathbf{AB} = AB \cos \alpha. \quad (24.6)$$

При  $\alpha$  острым **AB** больше нуля, при  $\alpha$  тупом **AB** меньше нуля; скалярное произведение двух взаимно-перпендикулярных векторов ( $\alpha = \pi/2$ ) равно нулю.

Заметим, что под квадратом вектора подразумевают скалярное произведение вектора на самого себя:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = AA \cos 0 = A^2 \quad (24.7)$$

<sup>1)</sup> Менее употребительны такие обозначения:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  и  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .



(векторное произведение вектора на самого себя равно нулю). Следовательно, квадрат вектора равен квадрату его модуля.

Из определения следует, что скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей, так что в отличие от векторного произведения скалярное произведение коммутативно.

Выражению (24.6) можно придать следующий вид:

$$\mathbf{AB} = AB \cos \alpha = A (B \cos \alpha) = B (A \cos \alpha).$$

Из рис. 54 видно, что  $B \cos \alpha$  равно  $B_A$  — проекции вектора  $\mathbf{B}$  на направление вектора  $\mathbf{A}$ , аналогично  $A \cos \alpha = A_B$  — проекции вектора  $\mathbf{A}$  на направление вектора  $\mathbf{B}$ . Поэтому скалярному произведению можно дать и другое определение: скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модуля одного из перемножаемых векторов на проекцию второго вектора на направление первого:

$$\mathbf{AB} = A_B B = AB_A. \quad (24.8)$$

Проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых векторов. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots) &= A(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots)_A = A(B_A + C_A + \dots) = \\ &= AB_A + AC_A + \dots = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов дистрибутивно — скалярное произведение некоторого вектора  $\mathbf{A}$  на сумму нескольких векторов равно сумме скалярных произведений вектора  $\mathbf{A}$  на каждый из слагаемых векторов, взятый в отдельности.

Воспользовавшись скалярным произведением векторов, выражение для работы (24.4) можно записать в следующем виде:

$$A = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{f}_i \Delta \mathbf{s}_i = \int_s \mathbf{f} ds, \quad (24.9)$$

где под  $\Delta s$  подразумевается вектор элементарного перемещения, который мы ранее обозначали через  $\Delta \mathbf{r}$  (модуль элементарного перемещения  $|\Delta \mathbf{r}|$  равен в пределе элементарному пути  $\Delta s$  (см. § 3)).

Пусть на тело действуют одновременно несколько сил, результирующая которых равна  $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{f}_k$ . Из

дистрибутивности скалярного произведения векторов вытекает, что работа  $\Delta A$ , совершаемая результирующей на пути  $\Delta s$ , может быть вычислена по формуле

$$\Delta A \approx \left( \sum_k \mathbf{f}_k \right) \Delta s = \sum_k (\mathbf{f}_k \Delta s) = \sum_k \Delta A_k,$$

т. е. работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности.

Элементарное перемещение  $\Delta s$  может быть представлено как

$$\Delta s = \mathbf{v} \Delta t.$$

Поэтому формуле (24.9) можно придать вид

$$A = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \mathbf{v} dt. \quad (24.10)$$

В соответствии с (24.8)  $\mathbf{f}_i \Delta s = f_i \Delta s_f$ , где  $\Delta s_f$  — проекция элементарного перемещения на направление силы. Поэтому работу можно записать как

$$A = \lim_{(\Delta s_f)_i \rightarrow 0} \sum f_i (\Delta s_f)_i = \int_s f ds_f. \quad (24.11)$$

Если сила имеет постоянную величину и направление (рис. 55), вектор  $\mathbf{f}$  в формуле (24.9) можно вынести за знак интеграла, в результате чего выражение для работы примет вид

$$A = \mathbf{f} \int ds = \mathbf{f} s = f s_f, \quad (24.12)$$

где  $s$  — вектор перемещения, а  $s_f$  — его проекция на направление силы.

## § 25. Мощность

На практике имеет значение не только величина совершенной работы, но и время, в течение которого она совершается. Поэтому для характеристики механизмов, предназначенных для совершения работы, вводится величина, показывающая, какую работу данный механизм

совершает в единицу времени. Эта величина называется мощностью. Таким образом, мощность  $W$  есть величина, равная отношению работы  $\Delta A$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за который она совершается:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (25.1)$$

Если за одинаковые, сколь угодно малые промежутки времени  $\Delta t$  совершается неодинаковая работа  $\Delta A$ , мощность оказывается изменяющейся со временем. В этом случае вводится в рассмотрение мгновенное значение мощности:

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (25.2)$$

В случае, когда мгновенная мощность (25.2) непостоянна, выражение (25.1) дает среднее значение мощности за промежуток времени  $\Delta t$ .

Пусть за время  $dt$  точка приложения силы получает перемещение  $ds$ . Тогда элементарная работа  $dA$ , совершаемая за время  $dt$ , будет равна

$$dA = \mathbf{f} ds,$$

и мощность можно представить в виде

$$W = \frac{dA}{dt} = \mathbf{f} \frac{ds}{dt}.$$

Но  $\frac{ds}{dt}$  равно вектору скорости  $\mathbf{v}$ . Следовательно, мощность оказывается равной скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы:

$$W = \mathbf{f} \mathbf{v}. \quad (25.3)$$

**Единицы мощности.** За единицу мощности принимается такая мощность, при которой в единицу времени (*сек*) совершается работа, равная единице (*дж* или *эрг*). В СИ единицей мощности является ватт (*вт*), равный джоулю в секунду (*дж/сек*). Единица мощности в СГС-системе (*эрг/сек*) специального названия не имеет. Соотношение между ваттом и *эрг/сек*:  $1 \text{ вт} = 10^7 \text{ эрг/сек}$ .

В МКГСС-системе единицей мощности служит лошадиная сила (*л. с.*), равная 75 килограммометрам в секунду.  $1 \text{ л. с.} = 736 \text{ вт}$ .

## § 26. Потенциальное поле сил. Силы консервативные и неконсервативные

Если тело поставлено в такие условия, что в каждой точке пространства оно подвержено воздействию других тел с силой, закономерно изменяющейся от точки к точке, говорят, что это тело находится в поле сил. Так,

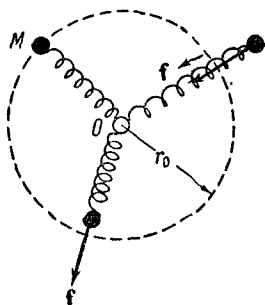


Рис. 56.

например, тело вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести — в каждой точке пространства на него действует сила  $P = mg$ , направленная по вертикали вниз.

В качестве второго примера рассмотрим тело  $M$ , «привязанное» пружиной к некоторому центру  $O$  (рис. 56). Один конец пружины может вращаться на шарнире вокруг неподвижной точки  $O$  в любом направлении, другой конец прикреплен к телу  $M$ . В каж-

дой точке пространства на тело  $M$  действует сила, направленная по радиусу (т. е. вдоль прямой, проходящей через центр  $O$  и тело  $M$ ) и равная

$$f = -k(r - r_0), \quad (26.1)$$

где  $r$  — расстояние тела от центра  $O$ ,  $r_0$  — длина недеформированной пружины,  $k$  — коэффициент пропорциональности. Если  $r > r_0$  (пружина растянута), сила направлена к центру и имеет знак «—» (направления силы и радиуса-вектора  $r$  противоположны); если  $r < r_0$  (пружина сжата), сила направлена от центра и имеет знак «+». Рассмотренное поле сил представляет собой частный случай так называемого поля центральных сил, характерного тем, что направление силы, действующей в любой точке пространства, проходит через некоторый центр, а величина силы зависит только от расстояния до этого центра  $f = f(r)$ .

Поле сил тяжести тоже является частным случаем центрального поля сил.

Приведенные примеры характерны тем, что силы, действующие на тело, зависят только от положения тела в пространстве (точнее, от положения тела по отноше-

нию к другим действующим на него телам) и не зависят от скорости тела.

Для сил, зависящих только от положения тела, может случиться, что работа, совершаемая ими над телом, не зависит от пути, а определяется только начальным и конечным положениями тела в пространстве. В этом случае поле сил называется потенциальным, а сами силы — консервативными. Силы, работа которых зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, называются неконсервативными.

Работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю. В самом деле, разобьем замкнутый путь, по которому совершает обход тело, находящееся в потенциальном поле, на две части: путь  $I$ , по которому тело переходит из точки  $1$  в точку  $2$ , и путь  $II$ ,

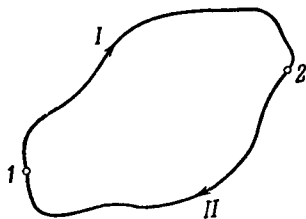


Рис. 57.



Рис. 58.

по которому тело переходит из точки  $2$  в точку  $1$ , причем точки  $1$  и  $2$  выберем совершенно произвольно (рис. 57). Работа на всем замкнутом пути будет равна сумме работ, совершаемых на каждом из участков:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}. \quad (26.2)$$

Покажем, что работа, совершаемая на каком-либо пути, например на пути  $II$  (рис. 57), при переходе тела по нему из точки  $1$  в точку  $2$  равна взятой с обратным знаком работе, совершаемой на том же пути при обратном переходе из точки  $2$  в точку  $1$ . Рассмотрим участок траектории  $\Delta s$  (рис. 58). Поскольку в потенциальном поле сила  $\mathbf{f}$  зависит только от положения тела в пространстве и не зависит от состояния движения тела

(в частности, от направления движения), элементарная работа на пути  $\Delta s$  при движении в одном направлении равна  $\Delta A = \mathbf{f} \Delta s$ , при движении же в другом направлении она равна  $\Delta A' = \mathbf{f} \Delta s'$ . Так как  $\Delta s' = -\Delta s$ , то  $\Delta A' = -\Delta A$ . Это справедливо для любого элементарного участка пути, а следовательно, и для работы на всем пути, так что

$$(A_{21})_{II} = - (A_{12})_{II}. \quad (26.3)$$

Воспользовавшись полученным результатом, равенство (26.2) можно записать следующим образом:

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II}. \quad (26.4)$$

Но в потенциальном поле сил работа не зависит от пути, т. е.  $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$ . Следовательно, выражение (26.4) равно нулю, что и требовалось доказать.

Если работа каких-то сил на любом замкнутом пути равна нулю, то работа этих сил при переходе тела из одного положения в другое, очевидно, не зависит от пути (это можно доказать, обратив ход проведенных выше рассуждений). Поэтому потенциальное поле сил можно определить как поле таких сил, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю. Поскольку работа в потенциальном поле сил на замкнутом пути равна нулю, на одних участках замкнутого пути силы совершают положительную работу, а на других — отрицательную. Работа сил трения за промежуток времени  $\Delta t$  согласно (24.10) равна

$$\Delta A = \mathbf{f} \mathbf{v} \Delta t = - f v \Delta t,$$

так как векторы  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{v}$  все время имеют противоположные направления<sup>1)</sup>. Следовательно, работа сил трения все время остается отрицательной и на замкнутом пути будет отлична от нуля. Таким образом, силы трения принадлежат к числу неконсервативных сил.

Докажем, что поле сил тяжести является потенциальным. Сила, действующая на тело в любой точке траек-

---

<sup>1)</sup> Здесь имеется в виду случай трения между движущимся телом и неподвижными (относительно системы отсчета) телами. В некоторых случаях работа силы трения может оказаться положительной. Это бывает, например, тогда, когда сила трения обусловлена взаимодействием данного тела с другим, движущимся в том же направлении, но с большей скоростью.

тории, имеет одинаковую величину  $P = mg$  и направление — вниз по вертикали (рис. 59). Поэтому согласно (24.12) работа равна

$$A = P(h_1 - h_2) = mg(h_1 - h_2). \quad (26.5)$$

Это выражение, очевидно, не зависит от пути, откуда следует, что поле сил тяжести потенциально.

Поле центральных сил также потенциально. Элементарная работа на пути  $\Delta s$  (рис. 60) равна

$$\Delta A = f(r) \Delta s_f.$$

Но проекция  $\Delta s$  на направление силы в данном месте, т. е. на направление радиуса-вектора  $r$  равна  $\Delta r$  — приращению расстояния тела от точки  $O$ :  $\Delta s_f = \Delta r$ . Поэтому

$$\Delta A = f(r) \Delta r.$$

Работа на всем пути

$$\begin{aligned} A &= \sum \Delta A_i = \\ &= \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i) \Delta r_i = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr. \end{aligned}$$

Последнее выражение зависит, очевидно, только от вида функции  $f(r)$  и от значений  $r_1$  и  $r_2$ . От вида траектории оно никак не зависит, поэтому центральное поле сил тоже потенциально.

## § 27. Энергия. Закон сохранения энергии

Как показывает опыт, тела часто оказываются в состоянии совершать работу над другими телами. Физическая величина, характеризующая способность тела или системы тел совершать работу, называется энер-

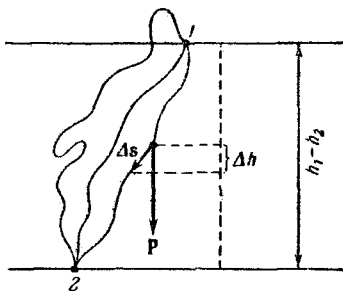


Рис. 59.

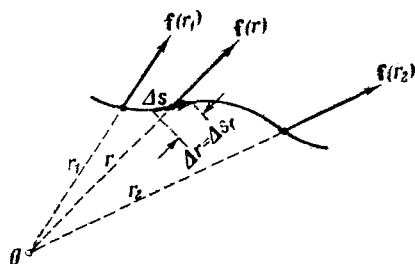
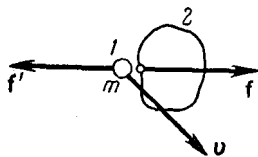


Рис. 60.

г и ей. Энергия тела может быть обусловлена причинами двойного рода: во-первых, движением тела с некоторой скоростью и, во-вторых, нахождением тела в потенциальном поле сил. Энергия первого вида называется кинетической энергией. Энергия второго вида называется потенциальной энергией. Кратко можно сказать, что кинетическая энергия — это энергия движения, а потенциальная — энергия положения.

**Кинетическая энергия.** Пусть тело 1 (имеется в виду материальная точка) массы  $m$ , движущееся со скоростью  $v$ , действует на соприкасающееся с ним тело 2 с силой  $f$  (рис. 61). За время  $dt$  точка приложения силы получит перемещение  $ds = v dt$ , вследствие чего тело 1 совершит над телом 2 работу



$$dA = f ds = f v dt. \quad (27.1)$$

Рис. 61.

Очевидно, что в данном случае тело 1 совершает работу над другим телом за счет запаса энергии, которой оно обладает в силу своего движения, т. е. за счет запаса кинетической энергии  $T$  (если бы тело 1 не двигалось, было бы равно нулю перемещение  $ds$ , а следовательно, и работа  $dA$ ). Поэтому совершенную телом 1 работу можно приравнять убыли<sup>1)</sup> его кинетической энергии:

$$dA = -dT.$$

<sup>1)</sup> Изменение какой-либо величины  $a$  можно характеризовать либо ее приращением, либо убылью. Приращением величины  $a$ , которое мы будем обозначать  $\Delta a$ , называют разность конечного ( $a_2$ ) и начального ( $a_1$ ) значений этой величины:

$$\text{приращение} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

Убылью величины  $a$  называют разность ее начального ( $a_1$ ) и конечного ( $a_2$ ) значений:

$$\text{убыль} = a_1 - a_2 = -\Delta a.$$

Убыль величины равна ее приращению, взятому с обратным знаком.

Приращение и убыль — алгебраические величины. Если  $a_2 > a_1$ , приращение положительно, а убыль отрицательна. В случае, когда  $a_2 < a_1$ , приращение отрицательно, а убыль положительна.



Приняв во внимание (27.1), найдем, что

$$dT = - \mathbf{f} \mathbf{v} dt. \quad (27.2)$$

По третьему закону Ньютона тело 2 действует на тело 1 с силой  $\mathbf{f}' = -\mathbf{f}$ , вследствие чего скорость тела 1 получает за время  $dt$  приращение

$$d\mathbf{v} = \frac{1}{m} \mathbf{f}' dt = -\frac{1}{m} \mathbf{f} dt.$$

Умножив скалярно обе части последнего равенства на  $m\mathbf{v}$ , найдем, что

$$m\mathbf{v} d\mathbf{v} = - \mathbf{f} \mathbf{v} dt. \quad (27.3)$$

Сравнивая (27.3) с (27.2), получим выражение для  $dT$ :

$$dT = m\mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (27.4)$$

Согласно формуле (24.8) скалярное произведение  $\mathbf{v} d\mathbf{v}$  можно представить в виде  $v |d\mathbf{v}| \cos \alpha = v (d\mathbf{v})_{\text{пр } v}$ <sup>1)</sup>, где  $(d\mathbf{v})_{\text{пр } v}$  — проекция вектора  $d\mathbf{v}$  на направление вектора  $\mathbf{v}$ .

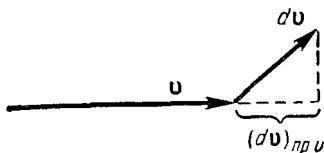


Рис. 62.

Из рис. 62 легко заключить, что  $(d\mathbf{v})_{\text{пр } v}$  равна приращению модуля скорости, т. е.  $dv$ . Поэтому выражение (27.4) можно записать следующим образом:

$$dT = m\mathbf{v} d\mathbf{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (27.5)$$

Отсюда следует<sup>2)</sup>, что кинетическая энергия материальной точки массы  $m$ , движущейся со скоростью  $v$ , равна

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (27.6)$$

Умножив на  $m$  числитель и знаменатель выражения (27.6) и приняв во внимание, что произведение  $m\mathbf{v}$

<sup>1)</sup> Нельзя писать это выражение в виде  $v \cdot d\mathbf{v} \cdot \cos \alpha$ , так как, вообще говоря,  $|d\mathbf{v}| \neq dv$ .

<sup>2)</sup> Интегрирование уравнения (27.5) приводит к выражению  $T = \frac{mv^2}{2} + \text{const}$ . Однако из физических соображений ясно, что при  $v = 0$  кинетическая энергия  $T$  также равна нулю, откуда следует, что константу нужно положить равной нулю.

равно импульсу тела  $p$ , выражению для кинетической энергии можно придать вид

$$T = \frac{p^2}{2m}. \quad (27.7)$$

Отметим весьма важное обстоятельство: работа  $A'$ , совершаемая над телом, равна приращению его кинетической энергии  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Чтобы доказать это, напишем выражение для элементарной работы

$$dA' = \mathbf{f}' \mathbf{v} dt$$

( $\mathbf{f}'$  — сила, совершающая над телом работу,  $\mathbf{v}$  — скорость тела). Теперь заменим произведение  $\mathbf{f}' dt$  через  $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v}$  [см. (22.4)], в результате получим

$$dA' = \mathbf{f}' \mathbf{v} dt = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT.$$

Принтегрировав это выражение, приходим к формуле

$$A' = T_2 - T_1. \quad (27.8)$$

Из (27.8) следует, что энергия имеет такую же размерность, как и работа. Это дает возможность измерять энергию в тех же единицах, какие используются для измерения работы.

**Потенциальная энергия.** Рассмотрим тело (имеется в виду материальная точка), находящееся в потенциальном поле сил. Сопоставим каждой точке поля (характеризуемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ) определенное значение некоторой функции  $U(\mathbf{r})$ , осуществив это следующим образом. Для некоторой исходной точки  $O$  примем произвольное значение функции, равное  $U_0$ . Чтобы получить значение функции  $U_1$  в некоторой точке  $I$ , прибавим к  $U_0$  работу  $A_{10}$ , которую совершают над телом силы поля при перемещении тела из точки  $I$  в точку  $O$ :

$$U_1 = U_0 + A_{10} \quad (27.9)$$

(отметим, что определенная таким образом функция  $U$  имеет размерность работы или энергии). Поскольку работа в потенциальном поле сил не зависит от пути (см. § 26), найденное таким способом значение  $U_1$  оказывается однозначным.

Аналогично определяются значения  $U(\mathbf{r})$  для всех остальных точек поля. В частности, значение  $U(\mathbf{r})$  в точке 2 равно

$$U_2 = U_0 + A_{20}. \quad (27.10)$$

Вычислим разность  $U_1 - U_2$ . Для этого вычтем из (27.9) выражение (27.10) и воспользуемся тем, что  $A_{20} = -A_{02}$  (см. § 26). В результате получим:

$$U_1 - U_2 = (U_0 + A_{10}) - (U_0 + A_{20}) = A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{02}.$$

Но сумма  $A_{10} + A_{02}$  дает работу, совершаемую силами поля при перемещении тела из точки 1 в точку 2 по траектории, проходящей через точку 0. Однако работа, совершаемая над телом при его перемещении из точки 1 в точку 2 по любой другой траектории (в том числе и не проходящей через точку 0), будет такой же самой. Поэтому сумму  $A_{10} + A_{02}$  можно записать просто в виде  $A_{12}$ . В итоге мы приходим к соотношению:

$$U_1 - U_2 = A_{12}. \quad (27.11)$$

Таким образом, с помощью функции  $U(\mathbf{r})$  можно определить работу, совершаемую над телом силами поля на любом пути, начинающемся в произвольной точке 1 и заканчивающемся в произвольной точке 2. Эта работа оказывается равной убыли функции  $U(\mathbf{r})$  на пути 1—2. Последнее обстоятельство дает основание трактовать физическую величину  $U(\mathbf{r})$  как один из видов механической энергии, который назвали потенциальной энергией.

Вследствие произвольности значения  $U_0$  [см. формулу (27.9)] потенциальная энергия оказывается определенной с точностью до некоторой неизвестной аддитивной постоянной. Это обстоятельство, однако, не имеет никакого значения, так как во все физические соотношения входит только разность значений  $U$  в двух положениях тела. Практически упрощаются считать  $U$  какого-то определенного положения тела равной нулю, а энергию других положений брать по отношению к этой энергии.

Конкретный вид функции  $U(\mathbf{r})$  зависит от характера силового поля. Так, например, в поле сил тяжести вблизи земной поверхности потенциальная энергия тела массы  $m$  имеет вид:

$$U = mgh, \quad (27.12)$$

где  $h$  — высота, отсчитанная от уровня, для которого принято  $U = 0$ . Это следует непосредственно из формулы (26.5), определяющей работу сил тяжести при перемещении тела с уровня  $h_1$  на уровень  $h_2$ .

Поскольку начало отсчета  $U$  можно выбирать произвольно, потенциальная энергия может иметь отрицательные значения. Если, например, принять за нуль потенциальную энергию тела, находящегося на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, лежащего на дне ямы глубиной  $h'$ , будет равна  $U = -mgh'$  (рис. 63). Отметим, что кинетическая энергия не может быть отрицательной.

В рассмотренном выше примере потенциальную энергию  $U = mgh$  мы относили к телу, находящемуся в поле сил тяжести. Однако, строго говоря, потенциальную энергию следует относить к системе взаимодействующих друг с другом тел. Так, в разобранным случае

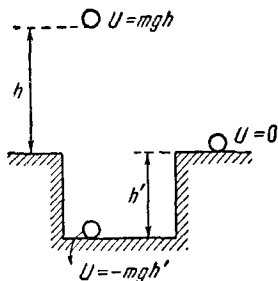


Рис. 63.

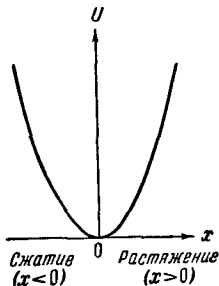


Рис. 64.

$U = mgh$  есть энергия системы Земля — тело. Потенциальная энергия системы тел зависит от их расположения по отношению друг к другу.

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело (например, сжатая или растянутая пружина). В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела (например, от расстояния между соседними витками пружины).

Согласно (24.5) как для сжатия, так и для растяжения пружины на величину  $x$  необходимо затратить работу  $A = \frac{1}{2}kx^2$ . Эта работа идет на увеличение потен-

циальной энергии пружины. Следовательно, зависимость потенциальной энергии пружины  $U$  от удлинения  $x$  имеет следующий вид:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (27.13)$$

На рис. 64 эта зависимость показана графически.

**Полная механическая энергия системы тел.** В общем случае тело может обладать одновременно и кинетической и потенциальной энергией. Сумма этих энергий образует полную механическую энергию. Так, например, тело  $M$ , находящееся на высоте  $h$  над поверхностью Земли и движущееся относительно Земли со скоростью  $v$ , обладает полной энергией:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (27.14)$$

Точнее говоря, выражение дает полную энергию системы Земля — тело;  $mgh$  есть взаимная потенциальная энергия этой системы,  $mv^2/2$  — кинетическая энергия тела  $M$ , а кинетическая энергия Земли в рассматриваемой системе отсчета равна нулю, что и дает основание говорить об энергии (27.14) как об энергии тела  $M$ .

Потенциальная и кинетическая энергии могут превращаться друг в друга. Рассмотрим случай свободного падения первоначально покоившегося тела с высоты  $h$ . До начала падения кинетическая энергия тела равна нулю (тело покоится), а потенциальная — равна  $mgh$ . В конце падения тело обладает скоростью

$$v = \sqrt{2gh} \quad (27.15)$$

и, следовательно, кинетической энергией

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh,$$

но зато потенциальная энергия на высоте  $h = 0$  будет равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия превращается в эквивалентное количество кинетической энергии.

Тело, брошенное с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью  $v$ , обладает вначале кинетической энергией  $mv^2/2$  и потенциальной энергией, равной нулю. Постепенно теряя скорость, тело сможет подняться на высоту  $h$ , связанную с начальной скоростью соотношением (27.15). На высоте  $h$  скорость, а следовательно,

и кинетическая энергия тела, станет равной нулю, но зато его потенциальная энергия станет равной первоначальному запасу кинетической энергии.

В обоих случаях (падения и подъема тела вблизи поверхности Земли) полная энергия тела остается неизменной (сопротивлением воздуха движению тела пренебрегаем). Легко убедиться<sup>1)</sup> в том, что на любой промежуточной высоте  $h'$  ( $0 < h' < h$ ) сумма

$$\frac{mv'^2}{2} + mgh'$$

( $v'$  — скорость на высоте  $h'$ ) равна  $mgh$  или  $\frac{mv^2}{2}$ .

Этот результат получился потому, что тело находилось под действием только силы, обуславливающей наличие потенциальной энергии (сила  $mg$  есть внутренняя сила, действующая в системе Земля — тело). Иначе обстоит дело при наличии внешних сил. За счет работы, совершаемой этими силами над телами, образующими систему, будет происходить изменение полной энергии системы. Пусть, например, первоначально покоившееся на поверхности Земли тело  $M$  окажется под действием силы  $f$ , большей силы тяжести  $mg$  и имеющей направление вверх по вертикали (эта сила может исходить только от тел, не входящих в систему Земля — тело  $M$ ). Тогда тело начнет подниматься с некоторым ускорением, вследствие чего его потенциальная и кинетическая энергии будут расти, причем увеличение полной энергии будет равно работе, совершаемой над телом  $M$  внешней силой  $f$ .

Полная механическая энергия системы, состоящей из  $N$  тел, между которыми действуют консервативные силы, складывается из потенциальной энергии системы как целого и из кинетической энергии системы, которая в свою очередь складывается из кинетических энергий отдельных тел, образующих систему:

$$E = U + T = U + \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (27.16)$$

<sup>1)</sup> Рекомендуется проделать это в порядке упражнения.

**Закон сохранения энергии.** Рассмотрим систему из  $N$  тел, между которыми действуют только консервативные силы (рис. 65). Предположим, что тело  $1$  переместилось по произвольной траектории в положение  $1'$ . При этом силы, с которыми действуют на тело  $1$  все остальные тела системы, совершат работу, не зависящую от пути перемещения тела  $1$  и определяющуюся лишь начальным и конечным положениями тела относительно всех других тел. Аналогично при перемещении всех  $N$  тел в новые положения над этими телами консервативные силы, действующие в системе, совершат работу, величина которой зависит только от начального и конечного расположения тел друг относительно друга. Следовательно, каждому взаимному расположению (каждой конфигурации) тел можно приписать определенное значение потенциальной энергии  $U$ , и работу консервативных сил при переходе от одной конфигурации к другой вычислять как разность значений  $U$ , соответствующих этим конфигурациям:

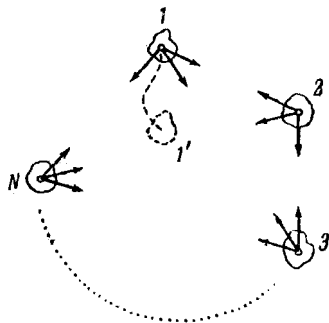


Рис. 65.

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (27.17)$$

Пусть на тела системы, кроме внутренних консервативных сил, действуют также внешние силы. Работу, совершаемую всеми силами, приложенными к  $i$ -му телу системы, можно представить как сумму работы  $(A_{12})_i$ , совершаемой внутренними силами, и работы  $A'_i$ , совершаемой внешними силами, действующими на данное тело. Полная работа идет, как мы знаем, на приращение кинетической энергии тела [см. (27.8)]. Следовательно,

$$(A_{12})_i + A'_i = (T_2)_i - (T_1)_i. \quad (27.18)$$

Суммируя выражение (27.18) по всем телам системы, получим:

$$\sum (A_{12})_i + \sum A'_i = \sum (T_2)_i - \sum (T_1)_i. \quad (27.19)$$

Первая из сумм в выражении (27.19) представляет собой работу консервативных сил, совершаемую над телами при переходе системы из начальной (первой) конфигурации в конечную (вторую). Согласно (27.17) эта работа может быть представлена как разность значений потенциальной энергии системы в начале и в конце процесса:

$$\sum (A_{12})_i = U_1 - U_2.$$

Вторая сумма в левой части выражения (27.19) представляет собой полную работу внешних сил, совершаемую над телами системы. Обозначим ее  $A'$ .

Правая часть в (27.19), очевидно, равна  $T_2 - T_1$ , т. е. разности значений полной кинетической энергии системы в конечном и начальном состояниях.

Таким образом, формуле (27.19) можно придать вид

$$U_1 - U_2 + A' = T_2 - T_1.$$

Группируя соответствующим образом члены, получим:

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A'.$$

Наконец, введя обозначение полной энергии системы  $E = T + U$ , мы придем к соотношению

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A'. \quad (27.20)$$

Итак, приращение полной энергии системы тел, между которыми действуют консервативные силы, оказывается равным работе внешних сил, приложенных к телам системы.

Если система замкнута, т. е. внешние силы отсутствуют, то согласно (27.20)  $\Delta E = 0$ , откуда следует, что

$$E = \text{const}. \quad (27.21)$$

В формулах (27.20) и (27.21) заключено существование одного из основных законов механики — закона сохранения энергии. В механике этот закон формулируется следующим образом: *полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.*

Если в замкнутой системе, кроме консервативных, действуют также неконсервативные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы



не сохраняется. Рассматривая неконсервативные силы как внешние, можно написать:

$$E_2 - E_1 = A_{н.к.},$$

где  $A_{н.к.}$  — работа неконсервативных сил. Силы трения совершают, как правило, отрицательную работу (см. сноску на стр. 88). Поэтому наличие сил трения в замкнутой системе приводит к уменьшению ее полной механической энергии со временем. Действие сил трения приводит к превращению механической энергии в другие, немеханические, виды энергии. В этом случае выполняется более общий закон сохранения — в изолированной от любых внешних воздействий системе остается постоянной сумма всех видов энергии (включая и немеханические).

## § 28. Связь между потенциальной энергией и силой

Каждой точке потенциального поля соответствует, с одной стороны, некоторое значение вектора силы  $\mathbf{f}$ , действующей на тело, с другой стороны, некоторое значение потенциальной энергии тела  $U$ . Следовательно, между силой и потенциальной энергией должна существовать определенная связь.

Для установления этой связи вычислим элементарную работу  $\Delta A$ , совершаемую силами

поля при малом перемещении тела  $\Delta s$ , происходящем вдоль произвольно выбранного направления в пространстве, которое мы обозначим буквой  $s$  (рис. 66). Эта работа равна

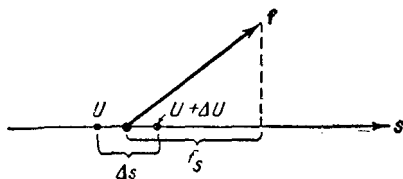


Рис. 66.

совершаемую силами поля при малом перемещении тела  $\Delta s$ , происходящем вдоль произвольно выбранного направления в пространстве, которое мы обозначим буквой  $s$  (рис. 66). Эта работа равна

$$\Delta A = f_s \Delta s, \quad (28.1)$$

где  $f_s$  — проекция силы  $\mathbf{f}$  на направление  $s$ .

Поскольку в данном случае работа совершается за счет запаса потенциальной энергии, она равна убыли потенциальной энергии  $-\Delta U$  на отрезке  $\Delta s$  оси  $s$ :

$$\Delta A = -\Delta U, \quad (28.2)$$

Сопоставляя (28.1) и (28.2), получаем:

$$f_s \Delta s = -\Delta U,$$

откуда

$$f_s = -\frac{\Delta U}{\Delta s}. \quad (28.3)$$

Выражение (28.3) дает среднее значение  $f_s$  на отрезке  $\Delta s$ . Чтобы получить значение  $f_s$  в данной точке, нужно произвести предельный переход:

$$f_s = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta s}. \quad (28.4)$$

Поскольку  $U$  может изменяться не только при перемещении вдоль оси  $s$ , но также и при перемещениях вдоль других направлений, предел в формуле (28.4) представляет собой так называемую частную производную от  $U$  по  $s$ :

$$f_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \quad (28.5)$$

Соотношение (28.5) справедливо для любого направления в пространстве, в частности, и для направлений декартовых координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ f_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ f_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

Формулы (28.6) определяют проекции вектора силы на координатные оси. Если известны эти проекции, оказывается определенным и сам вектор силы. В соответствии с (2.8)

$$\mathbf{f} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (28.7)$$

В математике вектор

$$\frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k},$$

где  $a$  — скалярная функция  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , называется градиентом этого скаляра и обозначается символом

grad  $a$ . Следовательно, сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком

$$\mathbf{f} = -\text{grad } U. \quad (28.8)$$

Пример. Возьмем в качестве примера поле сил тяжести. Ось  $z$  направим по вертикали вверх (рис. 67). При таком выборе координатных осей потенциальная энергия будет иметь вид [(см. (27.12)]

$$U = mgz + \text{const.}$$

Проекция силы на оси согласно (28.6) равны

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = -mg,$$

откуда следует, что сила равна  $mg$  и направлена в сторону, противоположную направлению  $z$ , т. е. вниз по вертикали.

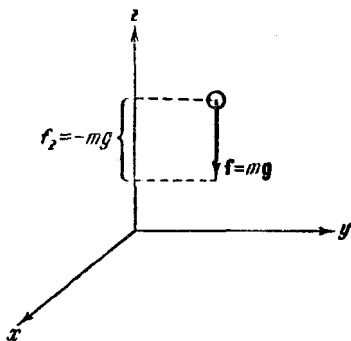


Рис. 67.

## § 29. Условия равновесия механической системы

В замкнутой системе полная энергия остается постоянной, поэтому кинетическая энергия может возрасти только за счет уменьшения потенциальной энергии. Если система находится в таком состоянии, что скорости всех тел равны нулю, а потенциальная энергия имеет минимальное значение, то без воздействия извне тела системы не могут прийти в движение, т. е. система будет находиться в равновесии.

Таким образом, для замкнутой системы равновесной может быть только такая конфигурация тел, которая соответствует минимуму потенциальной энергии системы.

Рассмотрим случай, когда взаимное расположение тел системы может быть определено с помощью только одной величины, например координаты  $x$ . В качестве примера можно привести систему Земля — шарик, скользящий без трения по укрепленной неподвижно изогнутой

проволоке (рис. 68, а). Другим примером может служить прикрепленный к концу пружины шарик, скользящий по горизонтальной направляющей (рис. 69, а). Графики функции  $U(x)$  показаны на рис. 68, б и 69, б. Минимумам  $U$  соответствуют значения  $x$ , равные  $x_0$  (на рис. 69  $x_0$  есть длина недеформированной пружины). Условие минимума  $U$  имеет вид

$$\frac{dU}{dx} = 0. \quad (29.1)$$

В соответствии с (28.6) условие (29.1) равнозначно тому, что

$$f_x = 0 \quad (29.2)$$

(когда  $U$  является функцией только одной переменной  $x$ ,  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx}$ ).

Таким образом, конфигурация системы, соответствующая минимуму потенциальной энергии, обладает тем

свойством, что силы, действующие на тела системы, равны нулю. Этот результат остается справедливым и в общем случае, когда  $U$  является функцией нескольких переменных.

В случае, изображенном на рис. 68, условия (29.1) и (29.2) выполняются также для  $x$ , равного  $x'_0$  (т. е. для максимума  $U$ ). Определяемое этим значением  $x$  положение шарика также будет равновесным. Однако это равновесие в отличие от равновесия при  $x = x_0$  будет неустойчивым: достаточно слегка вывести шарик из этого положения, как возникает сила, которая будет удалять шарик от положения  $x'_0$ . Силы, возникающие при смещении шарика из положения устойчивого равновесия (для которого  $x = x_0$ ), направлены так, что стремятся вернуть шарик в положение равновесия.

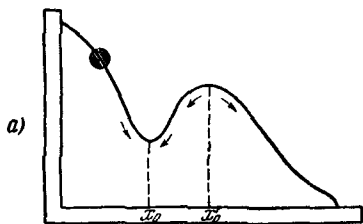
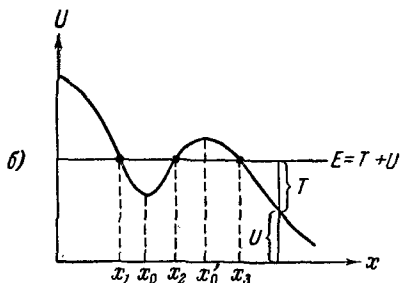


Рис. 68.

Зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия системы, можно сделать ряд заключений о характере движения системы. Поясним это, воспользовавшись графиком, изображенным на рис. 68, б. Если полная энергия системы имеет значение, соответствующее проведенной на графике горизонтальной черте, то система может совершать движение либо в пределах от  $x_1$  до  $x_2$  либо в пределах от  $x_3$  до бесконечности. В область  $x < x_1$  и  $x_2 < x < x_3$  система проникнуть не может, так как потенциальная энергия не может стать больше полной энергии (если бы это случилось, то кинетическая энергия стала бы отрицательной). Таким образом, область  $x_2 < x < x_3$  представляет собой потенциальный барьер, через который система не может проникнуть, имея данный запас полной энергии.

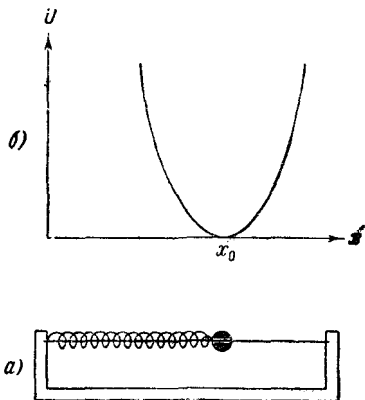


Рис. 69.

Рис. 68, б поясняет, как с помощью графика  $U$  определить кинетическую энергию, которой обладает система при данном значении  $x$ .

### § 30. Центральный удар шаров

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит

полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются двумя условиями — сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы тел.

**Абсолютно неупругий удар** характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон же сохранения механической энергии не соблюдается — имеет место

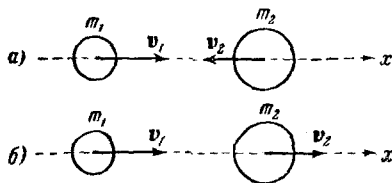


Рис. 70.

закон сохранения суммарной энергии различных видов — механической и внутренней. Мы ограничимся рассмотрением центрального удара двух шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. При центральном ударе соударение может произойти, если: 1) шары движутся навстречу друг другу (рис. 70, а) и 2) один из шаров догоняет другой (рис. 70, б).

Будем предполагать, что шары образуют замкнутую систему или что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга.

Рассмотрим вначале абсолютно неупругий удар. Пусть массы шаров равны  $m_1$  и  $m_2$ , а скорости до удара  $v_{10}$  и  $v_{20}$ . В силу закона сохранения суммарный импульс шаров после удара должен быть таким же, как и до удара:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2) v \quad (30.1)$$

( $v$  — одинаковая для обоих шаров скорость после удара).

Из (30.1) следует, что

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (30.2)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{v}_{10}$  и  $\mathbf{v}_{20}$  направлены вдоль одной и той же прямой, вектор  $\mathbf{v}$  также имеет направление, совпадающее с этой прямой. В случае б) (см. рис. 70), он направлен в ту же сторону, что и векторы  $\mathbf{v}_{10}$  и  $\mathbf{v}_{20}$ . В случае а) вектор  $\mathbf{v}$  направлен в сторону того из векторов  $\mathbf{v}_{i0}$ , для которого произведение  $m_i v_{i0}$  больше.

Модуль вектора  $\mathbf{v}$  может быть вычислен по следующей формуле:

$$v = \left| \frac{m_1 v_{10} \pm m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \right|, \quad (30.3)$$

где  $v_{10}$  и  $v_{20}$  — модули векторов  $\mathbf{v}_{10}$  и  $\mathbf{v}_{20}$ ; знак «—» соответствует случаю а), знак «+» — случаю б).

Теперь рассмотрим абсолютно упругий удар. При таком ударе выполняются два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Обозначим массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , скорости шаров до удара  $\mathbf{v}_{10}$  и  $\mathbf{v}_{20}$  и, наконец, скорости шаров после удара  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ . Напишем уравнения сохранения импульса и энергии:

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2, \quad (30.4)$$

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (30.5)$$

Преобразуем (30.4) следующим образом:

$$m_1 (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) = m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}). \quad (30.6)$$

Учитывая, что  $(\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ , приведем (30.5) к виду

$$m_1 (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) (\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1) = m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}) (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}). \quad (30.7)$$

Из соображений симметрии можно утверждать, что скорости шаров после удара будут направлены вдоль той же прямой, вдоль которой двигались центры шаров перед ударом. Следовательно, все векторы в (30.6) и

<sup>1)</sup> См. (24.7).

(30.7) коллинеарны. Это дает возможность заключить из сравнения (30.6) и (30.7), что

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}. \quad (30.8)$$

Умножая (30.8) на  $m_2$  и вычитая результат из (30.6), а затем умножая (30.8) на  $m_1$  и складывая результат с (30.6), получим векторы скоростей шаров после удара:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{2m_2\mathbf{v}_{20} + (m_1 - m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{2m_1\mathbf{v}_{10} + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (30.9)$$

Для численных подсчетов спроектируем (30.9) на направление вектора  $\mathbf{v}_{10}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\mp 2m_2v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}, \\ v_2 &= \frac{2m_1v_{10} \mp (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

В этих формулах  $v_{10}$  и  $v_{20}$  — модули, а  $v_1$  и  $v_2$  — проекции соответствующих векторов. Верхний знак «—» соответствует случаю шаров, движущихся навстречу друг другу, нижний знак «+» — случаю, когда первый шар нагоняет второй.

Отметим, что скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми. В самом деле, приравняв друг другу выражения (30.9) для  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  и произведя преобразования, получим:

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20}.$$

Следовательно, для того чтобы скорости шаров после удара оказались одинаковыми, необходимо, чтобы они были одинаковыми и до удара, но в этом случае соударение не может произойти. Отсюда следует, что условие равенства скоростей шаров после удара несовместимо с законом сохранения энергии. Итак, при неупругом ударе механическая энергия не сохраняется — она частично переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, что приводит к их нагреву.

Рассмотрим случай, когда массы соударяющихся шаров равны:  $m_1 = m_2$ . Из (30.9) следует, что при этом условии

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{10},$$



т. е. шары при соударении обмениваются скоростями. В частности, если один из шаров одинаковой массы, например второй, до соударения покоится, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально первый шар; первый же шар после удара оказывается неподвижным.

С помощью формул (30.9) можно определить скорость шара после упругого удара о неподвижную или движущуюся стенку (которую можно рассматривать как шар бесконечно большой массы  $m_2$  и бесконечно большого радиуса). Деля числитель и знаменатель выражений (30.9) на  $m_2$  и пренебрегая членами, содержащими множитель  $m_1/m_2$ , получаем:

$$v_1 = 2v_{20} - v_{10},$$

$$v_2 = v_{20}.$$

Как следует из полученного результата, скорость стенки остается неизменной. Скорость же шара, если стенка неподвижна ( $v_{20} = 0$ ), меняет направление на противоположное; в случае движущейся стенки изменяется также величина скорости шара (возрастает на  $2v_{20}$ , если стенка движется навстречу шару, и убывает на  $2v_{20}$ , если стенка «уходит» от догоняющего ее шара).

## НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

## § 31. Силы инерции

Как уже отмечалось (см. § 13), законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело обладает одинаковым ускорением  $\mathbf{w}$ . Поскольку любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальных систем с некоторым ускорением, ускорение тела в неинерциальной системе отсчета  $\mathbf{w}'$  будет отличаться от  $\mathbf{w}$ . Обозначим разность ускорений тела в инерциальной и неинерциальной системах символом  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{a}. \quad (31.1)$$

Если неинерциальная система движется относительно инерциальной поступательно, то  $\mathbf{a}$  совпадает с ускорением неинерциальной системы отсчета. При вращательном движении различные точки неинерциальной системы имеют неодинаковое ускорение. В этом случае  $\mathbf{a}$  нельзя трактовать как ускорение, с которым неинерциальная система движется относительно инерциальной.

Пусть результирующая всех сил, обусловленных действием на данное тело со стороны других тел, равна  $\mathbf{f}$ . Тогда согласно второму закону Ньютона

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m} \mathbf{f}.$$

Ускорение же относительно неинерциальной системы отсчета можно в соответствии с (31.1) представить в виде

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{f} - \mathbf{a}.$$

Таким образом, даже если результирующая всех сил, приложенных к телу, будет равна нулю, тело будет двигаться по отношению к неинерциальной системе отсчета с ускорением  $-a$ , т. е. так, как если бы на него действовала сила, равная  $-ma$ .

Следовательно, при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями динамики, справедливыми только для инерциальных систем, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые силы инерции  $f_{in}$ , которые следует полагать равными произведению массы тела на взятую с обратным знаком разность его ускорений по отношению к инерциальной и неинерциальной системам отсчета:

$$f_{in} = -m(w - w') = -ma. \quad (31.2)$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета будет иметь вид

$$mw' = f + f_{in}. \quad (31.3)$$

Поясним сказанное следующим примером. К кронштейну, закрепленному на тележке, подвешен на нити груз (рис. 71). Пока тележка покоится или движется

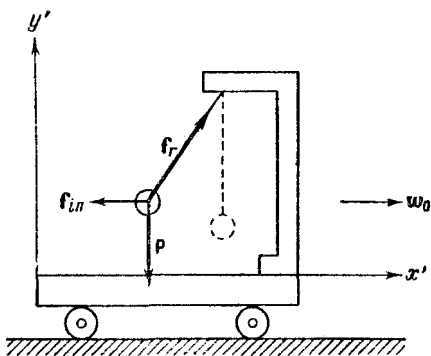


Рис. 71.

без ускорения, нить расположена вертикально и сила тяжести  $P$  уравновешивается реакцией нити  $f_r$ . Теперь приведем тележку в поступательное движение с ускорением  $w_0$ . Нить отклонится от вертикали на такой угол,

чтобы результирующая сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{f}_r$  обеспечивала ускорение тела, равное  $\mathbf{w}_0$ . Относительно системы отсчета, связанной с тележкой, тело покоится, несмотря на то, что результирующая сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{f}_r$  отлична от нуля. Отсутствие ускорения тела по отношению к этой системе отсчета можно формально объяснить тем, что, кроме сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{f}_r$ , на тело действует еще и сила инерции

$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0. \quad (31.4)$$

Введение сил инерции дает возможность описывать движение тел в любых (как инерциальных, так и неинерциальных) системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения.

Следует отчетливо понимать, что силы инерции нельзя ставить в один ряд с такими силами, как упругие, гравитационные силы и силы трения, т. е. силами, обусловленными воздействием на тело со стороны других тел. Силы инерции обусловлены свойствами той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления. В этом смысле их можно назвать фиктивными силами.

Введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. В принципе любое движение можно всегда рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчета. Однако практически часто представляет интерес как раз движение тел по отношению к неинерциальным системам отсчета, например по отношению к земной поверхности. Использование сил инерции дает возможность решить соответствующую задачу непосредственно по отношению к такой системе отсчета, что часто оказывается значительно проще, чем рассмотрение движения в инерциальной системе.

## § 32. Центробежная сила инерции

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему оси  $z'$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 72). Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, прикрепленный к центру диска пружиной. Шарик при вращении занимает такое положение на спице, при котором сила натяжения пружины оказывается равной произведению массы шарика на центростремительное ускорение  $\omega^2 R$  ( $R$  — расстояние шарика от центра диска).

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится, так как, кроме силы, действующей со

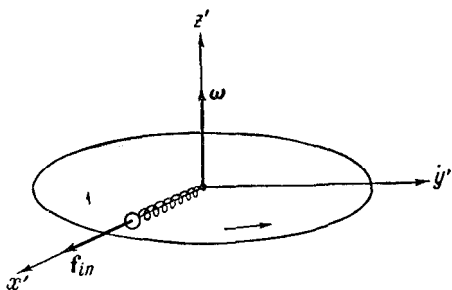


Рис. 72.

стороны пружины, к шарик приложена сила инерции:

$$f_{in} = m\omega^2 R, \quad (32.1)$$

направленная вдоль радиуса от центра диска. Силу инерции (32.1), возникающую во вращающейся (по отношению к инерциальным системам) системе отсчета, называют центробежной силой инерции.

Различные точки во вращающейся системе отсчета обладают различным по величине и направлению ускорением по отношению к инерциальной системе. В соответствии с этим центробежная сила инерции зависит от положения тела во вращающейся системе отсчета.

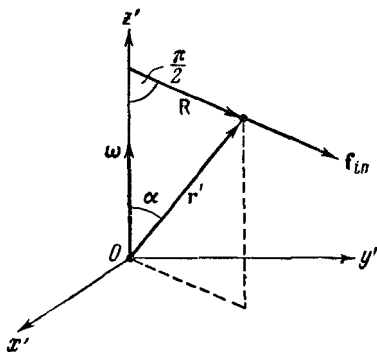


Рис. 73.

Центробежная сила инерции действует на тело во вращающейся системе отсчета независимо от того, покоится тело в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движется относительно нее со скоростью  $v'$ .

При точном решении задач о движении тел относительно земной поверхности нужно учитывать центробежную силу инерции, равную  $m\omega_3^2 R_3 \cos \varphi$ , где  $m$  — масса

тела,  $\omega_3$  — угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси,  $R_3$  — радиус земного шара,  $\varphi$  — широта местности (см. рис. 131 на стр. 185).

Упражнение. Показать, что центробежную силу инерции можно представить в виде

$$m [\omega, [\mathbf{r}', \omega]] = m\omega^2 \mathbf{R}, \quad (32.2)$$

где  $m$  — масса тела,  $\omega$  — угловая скорость вращающейся системы отсчета,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор тела относительно начала вращающейся системы отсчета, совпадающего с одной из точек оси вращения,  $\mathbf{R}$  — перпендикулярная к оси вращения составляющая  $\mathbf{r}'$  (рис. 73).

### § 33. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила, называемая силой Кориолиса, или кориолисовой силой инерции.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую  $OA$  (рис. 74, а). Запустим в направлении от  $O$  к  $A$  шарик со скоростью  $\mathbf{v}'$ . Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной нами прямой.

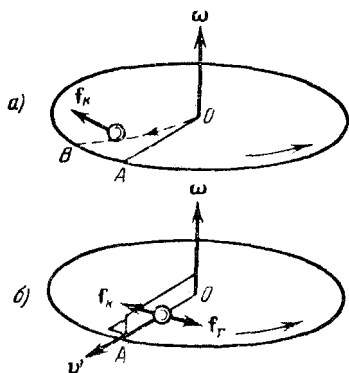


Рис. 74.

Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по изображенной пунктиром кривой  $OB$ , причем его скорость относительно диска  $\mathbf{v}'$  будет изменять свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила  $\mathbf{f}_k$ , перпендикулярная к скорости  $\mathbf{v}'$ .

Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую, например, в виде ребра  $OA$  (рис. 74, б). При

качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой  $f_r$ . Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что сила  $f_r$  уравнивается приложенной к шарiku силой инерции  $f_k$ , перпендикулярной к скорости  $v'$ . Сила  $f_k$  и есть кориолисова сила инерции. Будем искать ее по формуле (31.2), начав с рассмотрения частных случаев.

Случай 1. Тело движется в радиальном направлении с постоянной скоростью  $v'$ , перпендикулярной к оси вращения (рис. 75; ось вращения перпендикулярна к

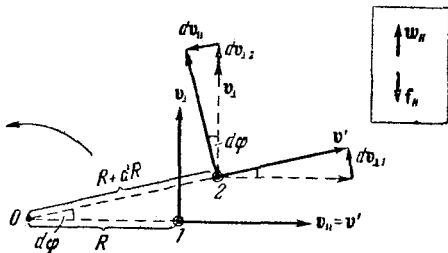


Рис. 75

плоскости рисунка). Поскольку  $v'$  постоянно, ускорение  $w'$  равно нулю, и сила инерции равна  $-mw$ .

Пусть в некоторый момент времени  $t$  тело находится в положении 1. В этот момент скорость  $v$  относительно неподвижной системы отсчета складывается из двух составляющих: составляющей вдоль радиуса  $v_{||}$ , равной скорости тела  $v'$ , и перпендикулярной к радиусу составляющей  $v_{\perp}$ , равной по модулю  $\omega R$  ( $R$  — расстояние тела от оси вращения,  $\omega$  — угловая скорость вращающейся системы отсчета).

За время  $dt$  прямая, вдоль которой движется тело, повернется на угол  $d\varphi = \omega dt$ , а тело сместится вдоль этой прямой на отрезок  $dR = v' dt$  и окажется в положении 2. В результате обе составляющие скорости  $v$ , получив перпендикулярные к ним приращения,  $dv_{\perp 1} = v' d\varphi$  и  $dv_{||} = \omega R d\varphi$ , повернутся на угол  $d\varphi$ . Кроме того, модуль составляющей  $v_{\perp}$  возрастет на  $dv_{\perp 2} = \omega dR = \omega v' dt$ . Это происходит потому, что в положении 2 составляющая  $v$ , перпендикулярная к радиусу, вдоль которого движется тело, становится равной  $\omega(R + dR)$ .

Таким образом, приращение  $dv$ , которое получает за время  $dt$  скорость  $v$ , можно представить как векторную сумму трех приращений (см. рис. 75):  $dv_{\perp 1}$ ,  $dv_{\perp 2}$  и  $dv_{\parallel}$ , из которых первые два перпендикулярны к вектору  $v'$ , а третье направлено вдоль той же прямой, что и  $v'$  (необходимо иметь в виду малость  $d\varphi$ ).

Разделив соответствующие составляющие  $dv$  на  $dt$ , мы получим составляющие ускорения  $w$  по отношению к неподвижной системе. Составляющая  $w_{\parallel}$  оказывается равной по модулю:

$$w_{\parallel} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \omega R \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 R.$$

Эта составляющая не зависит от  $v'$ ; она существует и при  $v' = 0$ . Произведение этой составляющей на  $-m$  дает уже известную нам центробежную силу инерции.

Составляющая  $dv_{\perp}$ , равная сумме  $dv_{\perp 1}$  и  $dv_{\perp 2}$ , после деления на  $dt$  дает составляющую  $w_{\perp}$  ускорения  $w$ , модуль которой равен

$$\begin{aligned} w_{\perp} &= \frac{dv_{\perp 1}}{dt} + \frac{dv_{\perp 2}}{dt} = v' \frac{d\varphi}{dt} + \omega \frac{dR}{dt} = \\ &= v'\omega + \omega v' = 2\omega v'. \end{aligned}$$

Вектор  $w_{\perp}$  (в дальнейшем мы его будем обозначать  $w_K$ ) перпендикулярен к  $v'$  и  $\omega$  и может быть представлен в виде

$$w_K = 2[\omega v'] \quad (33.1)$$

(вектор  $\omega$  на рис. 75 перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен на нас). Ускорение (33.1) называется кориолисовым ускорением. Умножив его на  $m$  и изменив знак на обратный, получим кориолисову силу инерции:

$$f_K = 2m[v'\omega]. \quad (33.2)$$

Случай 2. Относительно вращающейся системы отсчета тело движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, причем центр окружности лежит на этой оси (рис. 76). По отношению

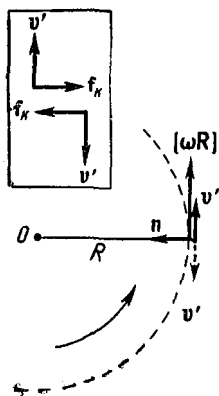


Рис. 76.



к вращающейся системе тело обладает центростремительным ускорением, которое равно

$$\mathbf{w}' = \frac{v'^2}{R} \mathbf{n}, \quad (33.3)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{v}'$  и имеющий направление к центру вращения.

Скорость тела относительно неподвижной системы отсчета будет складываться из двух перпендикулярных к радиусу  $R$  составляющих:  $v'$  и  $\omega R$ . В зависимости от направления скорости  $v'$  и направления вращения системы эти составляющие будут иметь либо одинаковые, либо противоположные направления. Модуль скорости  $v$  будет равен

$$v = |v' \pm \omega R|, \quad (33.4)$$

где «+» соответствует одинаковым, а «—» противоположным направлениям скоростей  $v'$  и  $\omega R$ .

По отношению к неподвижной системе тело также будет двигаться равномерно по окружности, так что ускорение  $\mathbf{w}$  можно записать следующим образом:

$$\mathbf{w} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n} = \frac{(v' \pm \omega R)^2}{R} \mathbf{n} = \frac{v'^2}{R} \mathbf{n} + \omega^2 R \mathbf{n} \pm 2v'\omega \mathbf{n}.$$

Первое слагаемое представляет собой ускорение  $\mathbf{w}'$  относительно вращающейся системы [см. (33.3)]. Следовательно,

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \omega^2 R \mathbf{n} \pm 2v'\omega \mathbf{n}.$$

В соответствии с этим выражением сила инерции оказывается состоящей из двух компонент:

$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{a} = -m\omega^2 R \mathbf{n} \mp 2mv'\omega \mathbf{n}. \quad (33.5)$$

Первая из этих сил есть центробежная сила инерции, вторая — кориолисова сила  $\mathbf{f}_K$ .

Сила  $\mathbf{f}_K$  перпендикулярна к векторам  $\mathbf{v}'$  и  $\boldsymbol{\omega}$  и имеет направление: а) от центра, если скорости  $v'$  и  $\omega R$  совпадают по направлению (верхний знак в (33.5)), и б) к центру, если скорости  $v'$  и  $\omega R$  направлены в противоположные стороны (нижний знак). Очевидно, что оба эти случая можно объединить в следующем выражении:

$$\mathbf{f}_K = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \quad (33.6)$$

Полученное выражение совпадает с (33.2).

Рассмотрев два частных случая движения тела во вращающейся системе отсчета, обратимся теперь к

случаю произвольного движения тела, причем для большей общности будем предполагать, что неинерциальная система координат  $K'$  не только вращается по отношению к неподвижной (инерциальной) системе  $K$ , но, кроме того, движется поступательно. Однако прежде получим одно важное соотношение, которое нам понадобится при рассмотрении общего случая.

**Соотношение между приращениями вектора в неподвижной и во вращающейся системах координат.** Возьмем две системы координат, одна из которых (обозначим ее  $K'$ ) вращается относительно другой ( $K$ ) с угловой скоростью  $\omega$ . Выберем эти системы так, чтобы их оси  $z$  и  $z'$  совпадали с осью вращения, т. е. с вектором  $\omega$  (рис. 77).

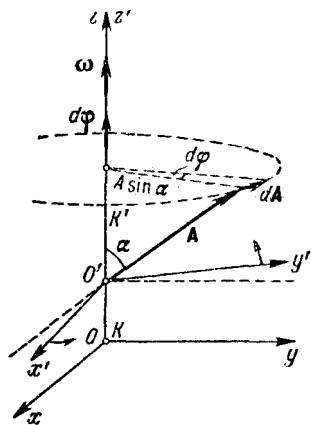


Рис. 77.

Рассмотрим некоторый вектор  $\mathbf{A}$ , начало которого поместим в точку  $O'$  — начало системы  $K'$ . Пусть вектор  $\mathbf{A}$  как-то изменяется со временем. Обозначим приращение вектора за время  $dt$ , наблюдаемое в системе координат  $K$ , через  $d\mathbf{A}$ , а приращение, наблюдаемое за то же время в системе  $K'$ , через  $d'\mathbf{A}$ . Легко сообразить, что приращения  $d\mathbf{A}$  и  $d'\mathbf{A}$  будут различны. Это обнаруживается особенно наглядно, если предположить, что вектор  $\mathbf{A}$  постоянен по отношению к системе  $K'$  и, следовательно, приращение его в этой системе  $d'\mathbf{A}$  равно нулю (этот случай изображен на рис. 77). Однако по отношению к системе  $K$  вектор  $\mathbf{A}$  будет поворачиваться со скоростью  $\omega$ . Как видно из рисунка, за время  $dt$ , за которое система  $K'$  повернется на угол  $d\varphi = \omega dt$ , вектор  $\mathbf{A}$  получает приращение  $d\mathbf{A}$ , которое может быть представлено в виде векторного произведения  $d\varphi$  на  $\mathbf{A}$ :  $d\mathbf{A} = [d\varphi, \mathbf{A}]$ . Действительно, модуль  $d\mathbf{A}$  равен  $A \sin \alpha d\varphi$ , а направлен вектор  $d\mathbf{A}$  перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $d\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , причем так, что поворот от  $d\varphi$  к  $\mathbf{A}$  вызвал бы перемещение правого винта в направлении  $d\mathbf{A}$ . Заметим, что такой же резуль-

т

тат получается для вектора, начало которого располагается не в начале координат, а в произвольной точке. Это можно понять, если учесть, что независимо от того, как располагается вектор  $\mathbf{A}$  по отношению к координатным осям, параллельная оси  $z'$  плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{A}$ , повернется на такой же угол  $d\varphi$ , на какой поворачивается система  $K'$ .

В общем случае, когда приращение  $d'\mathbf{A}$  в системе  $K'$  отлично от нуля, приращение в системе  $K$  определяется формулой:

$$d\mathbf{A} = d'\mathbf{A} + [d\varphi, \mathbf{A}]. \quad (33.7)$$

Это и есть то соотношение, которое нам понадобится при рассмотрении общего случая движения тела. К этому рассмотрению мы теперь и приступим.

**Общий случай движения тела в неинерциальной системе отсчета.** Возьмем две системы отсчета  $K$  и  $K'$  (рис. 78), из которых  $K$  инерциальна, а  $K'$  движется относительно  $K$  поступательно и, кроме того, равномерно вращается вокруг оси  $z'$ , остающейся все время параллельной оси  $z$  (вектор  $\omega$  постоянен по величине и по направлению). Положение материальной точки  $m$  по отношению к системе  $K$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , по отношению к системе  $K'$  — радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ . Между этими векторами и радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$ , проведенным из начала системы координат  $K$  в начало системы  $K'$ , имеется очевидное соотношение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \quad (33.8)$$

Скорость точки  $m$  по отношению к системе  $K$  по определению равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (33.9)$$

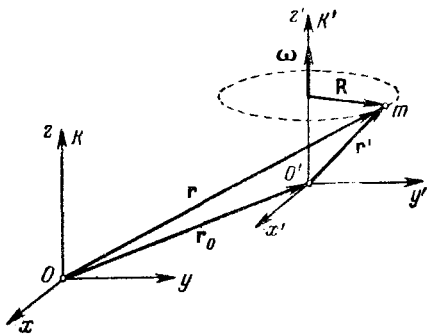


Рис. 78.

скорость же по отношению к системе  $K'$  есть

$$\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt}, \quad (33.10)$$

где через  $d'\mathbf{r}'$  обозначено приращение радиуса-вектора  $\mathbf{r}'$  по отношению к системе  $K'$ .

Согласно (33.8) приращение радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , наблюдаемое в системе  $K$ , равно

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}', \quad (33.11)$$

где  $d\mathbf{r}'$  — приращение радиуса-вектора  $\mathbf{r}'$  в системе  $K$ , которое, как было установлено выше [см. (33.7)], складывается из приращения  $d'\mathbf{r}'$ , наблюдаемого в системе  $K'$ , и вектора  $[d\varphi, \mathbf{r}'] = [\omega\mathbf{r}']dt$ :

$$d\mathbf{r}' = d'\mathbf{r}' + [\omega\mathbf{r}'] dt. \quad (33.12)$$

Подставив последнее соотношение в формулу (33.11), придем к следующему выражению:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d'\mathbf{r}' + [\omega\mathbf{r}'] dt.$$

Разделив это выражение на  $dt$  и приняв во внимание (33.9) и (33.10), получим формулу

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\omega\mathbf{r}'], \quad (33.13)$$

в которой  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$  — скорость поступательного движения системы  $K'$  по отношению к системе  $K$ . Если система  $K'$  движется только поступательно,  $\omega = 0$  и формула (33.13) превращается в уже знакомую нам формулу (17.3). В случае равенства нулю скоростей  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}'$  из (33.13) получается формула (11.4).

Теперь найдем наблюдаемое в системе  $K$  приращение вектора  $\mathbf{v}$ , определяемого выражением (33.13). Приняв во внимание, что  $\omega = \text{const}$ , получим:

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}' + [\omega, d\mathbf{r}'].$$

Заменим в этой формуле  $d\mathbf{r}'$  его значением (33.12), а  $d\mathbf{v}'$  — аналогичным (33.12) выражением:

$$d\mathbf{v}' = d'\mathbf{v}' + [d\varphi, \mathbf{v}'] = d'\mathbf{v}' + [\omega\mathbf{v}'] dt$$

(напомним, что  $d\mathbf{v}'$  есть приращение вектора  $\mathbf{v}'$ , наблюдаемое в системе  $K$ , а  $d'\mathbf{v}'$  — приращение  $\mathbf{v}'$ , наблюдаемое

мое в системе  $K'$ ). Произведя замену, придем к выражению:

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d'\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] dt + [\boldsymbol{\omega}, (d'\mathbf{r}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] dt)].$$

Воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения, последнее слагаемое полученного выражения можно представить в виде  $[\boldsymbol{\omega}, d'\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, ([\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] dt)]$ . Следовательно,

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d'\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] dt + [\boldsymbol{\omega}, d'\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] dt$$

(в последнем слагаемом мы вынесли скалярный множитель  $dt$  за знак векторного произведения).

Разделим найденное выражение на  $dt$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']].$$

Поскольку  $\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$  равно  $\mathbf{v}'$ , первые два векторных произведения совпадают и их можно объединить в одно слагаемое  $2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']$ . Производная  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  по определению есть ускорение  $\mathbf{w}$  точки  $m$  в системе  $K$ , аналогично  $\frac{d'\mathbf{v}'}{dt}$  есть ускорение  $\mathbf{w}'$  точки  $m$  в системе  $K'$ . Таким образом,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}' + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']], \quad (33.14)$$

где  $\mathbf{w}_0$  — ускорение начала координат системы  $K'$  («поступательное» ускорение системы  $K'$ ).

В § 31 было указано, что, умножив вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}'$  на  $m$  и изменив знак на обратный, получим силу инерции. Согласно (33.14)

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{w}_0 + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']].$$

Следовательно,

$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0 + 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] + m[\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]] \quad (33.15)$$

(в последних двух слагаемых изменение знака осуществлено перестановкой сомножителей).

Формула (33.15) содержит все виды сил инерции. Так, если система  $K'$  движется относительно системы  $K$  только поступательно, без вращения, сила инерции равна  $\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0$  [см. формулу (31.4)]. При наличии вращения появляются дополнительно кориолисова сила

$f_K = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$  [см. формулу (33.2)] и центробежная сила инерции  $f_{цб} = m[\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]]$ , которую можно представить в виде  $f_{цб} = m\omega^2 R$  [см. формулу (32.2)].

Напомним, что кориолисова сила возникает только в случае, когда тело изменяет свое положение по отношению к вращающейся системе отсчета (при  $\mathbf{v}' = 0$  выражение для кориолисовой силы обращается в нуль). Отметим также, что сила Кориолиса всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

**Примеры движений, в которых проявляется кориолисова сила инерции.** При истолковании явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности, в ряде случаев необходимо учитывать влияние кориолисовых сил. Например, при свободном падении тел на

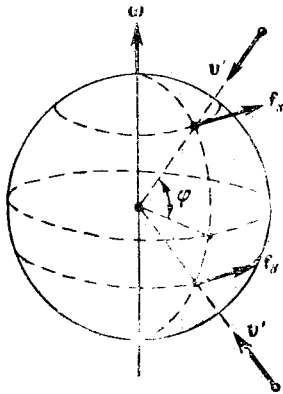


Рис. 79.

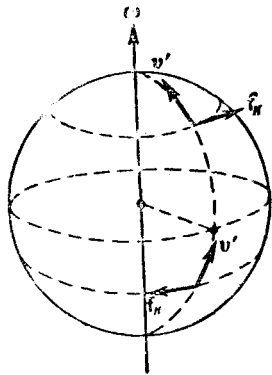


Рис. 80.

них действует кориолисова сила, обуславливающая отклонение к востоку от линии отвеса (рис. 79). Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

Летающий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции (рис. 80). При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу — в южном. При стрельбе вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произ-

веден в направлении на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведен в восточном направлении. Предоставляем читателю самому убедиться в том, что сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся вдоль меридиана в любом направлении (на север или на юг), направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево в южном полушарии. Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый берег в южном полушарии. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника. На рис. 81 показана траектория груза маятника (для простоты предположено, что маятник находится на полюсе). На северном полюсе сила Кориолиса будет все время направлена вправо по ходу маятника, на южном полюсе — влево. В итоге траектория имеет вид розетки.

Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так, что плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот.

Можно показать, что на широте  $\varphi$  плоскость качаний маятника поворачивается за сутки на угол  $2\pi \sin \varphi$ .

Таким образом, наблюдения за вращением плоскости качаний маятника (маятники, предназначенные для этой цели, называются маятниками Фуко) дают непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

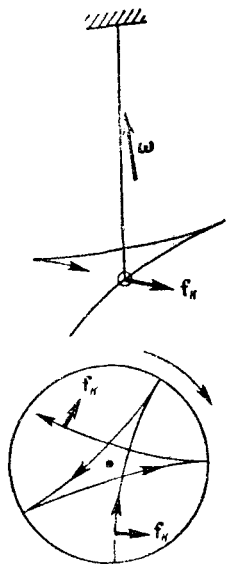


Рис. 81.

## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 34. Движение твердого тела<sup>1)</sup>

Во введении мы познакомились с двумя основными видами движения твердого тела — поступательным и вращательным.

При поступательном движении все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные по величине и направлению перемещения, вследствие чего скорости и ускорения всех точек в каждый момент времени оказываются одинаковыми. Поэтому достаточно определить движение одной из точек тела (например, его центра инерции) для того, чтобы охарактеризовать полностью движение всего тела.

При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Для описания вращательного движения нужно задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени.

Оказывается, что любое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух указанных выше основных видов движения. Покажем это для случая плоского движения, т. е. такого, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения может служить качение цилиндра по плоскости (рис. 82).

---

<sup>1)</sup> В этой главе всюду, кроме § 45, имеется в виду абсолютно твердое тело.



Произвольное перемещение твердого тела из положения 1 в положение 2 (рис. 83) можно представить как сумму двух перемещений — поступательного перемещения из положения 1 в положение 1' или 1'' и поворота вокруг оси  $O'$  или оси  $O''$ . Очевидно, что такое разбиение перемещения на поступательное и вращательное может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, однако в любом случае производится поворот на один и тот же угол  $\varphi$ .

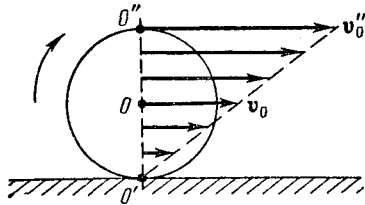


Рис. 82.

В соответствии со сказанным выше элементарное перемещение какой-либо точки тела  $ds$  можно разложить на два перемещения — «поступательное»  $ds_{\text{п}}$  и «вращательное»  $ds_{\text{в}}$ :

$$ds = ds_{\text{п}} + ds_{\text{в}},$$

причем  $ds_{\text{п}}$  для всех точек тела одно и то же.

Такое разложение перемещения  $ds$  можно, как мы видели, осуществить различными способами, причем в

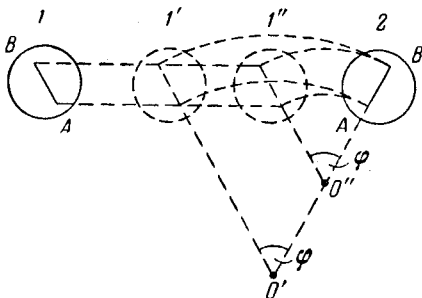


Рис. 83.

каждом случае вращательное перемещение  $ds_{\text{в}}$  осуществляется поворотом тела на один и тот же угол  $d\varphi$  (но относительно различных осей), в то время как  $ds_{\text{п}}$  и  $ds_{\text{в}}$  оказываются различными.

Разделив  $ds$  на соответствующий промежуток времени  $dt$ , получим скорость точки  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_{\text{п}}}{dt} + \frac{ds_{\text{в}}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

где  $v_0$  — одинаковая для всех точек тела скорость поступательного движения и  $v'$  — различная для разных точек тела скорость, обусловленная вращением.

Таким образом, плоское движение твердого тела можно представить как сумму двух движений — поступательного со скоростью  $v_0$  и вращательного с угловой скоростью  $\omega$  (вектор  $\omega$  на рис. 82 направлен перпендикулярно к плоскости чертежа, за чертеж). Подобное представление сложного движения можно осуществить множеством способов, отличающихся значениями  $v_0$  и  $v'$ ,

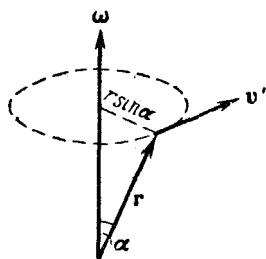


Рис. 84.

но соответствующих одной и той же угловой скорости  $\omega$ . Например, движение цилиндра, катящегося без скольжения по плоскости (рис. 82), можно представить как поступательное движение со скоростью  $v_0$  и одновременное вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O$ , либо как поступательное движение со скоростью  $v''_0 = 2v_0$  и вращение с той же угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O''$ , либо, наконец, как одно только вращение опять-таки с той же угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O'$ .

Назвав систему отсчета, относительно которой мы рассматриваем сложное движение твердого тела, неподвижной, движение тела можно представить как вращение с угловой скоростью  $\omega$  в системе отсчета, которая движется относительно неподвижной системы поступательно со скоростью  $v_0$ .

Линейная скорость  $v'$  точки с радиусом-вектором  $r$ , обусловленная вращением твердого тела, равна (рис. 84)

$$v' = [\omega r].$$

Следовательно, скорость этой точки при сложном движении тела может быть представлена в виде

$$v = v_0 + [\omega r]. \quad (34.1)$$

Существуют такие точки (они могут лежать в пределах тела, либо вне его), которые, участвуя в обоих движениях — поступательном и вращательном, будут неподвижными. В самом деле, при заданных  $v_0$  и  $\omega$  всегда можно найти такое  $r$ , что (34.1) будет равно нулю. Пусть

в данный момент движущаяся поступательно система отсчета имеет скорость  $v_0$  (рис. 85). Тело в этой системе вращается с угловой скоростью  $\omega$  в направлении, указанном стрелкой. Скорость  $v'$ , обусловленная вращением, имеет для различных точек значения, показанные на рисунке. Для точки  $O'$  скорости  $v_0$  и  $v'$  равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, скорость этой точки относительно неподвижной системы отсчета равна нулю.

Вместе с тем, если имеется хотя бы один вектор  $\mathbf{r}$ , который при векторном перемножении с  $\omega$  дает вектор,

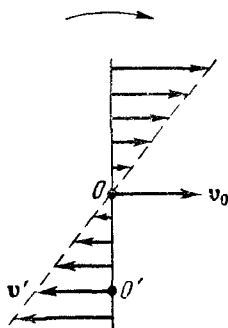


Рис. 85.

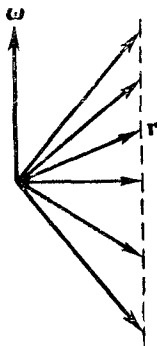


Рис. 86.

равный —  $v_0$ , то существует еще ряд векторов, которые при векторном перемножении с  $\omega$  дают такой же результат; векторное произведение  $\omega$  на любой из изображенных на рис. 86 векторов  $\mathbf{r}$  имеет одинаковую величину и направление. Точки, определяемые этими радиусами-векторами, будут в рассматриваемый момент времени неподвижными. Эти точки, как видно из рисунка, лежат на одной прямой и образуют так называемую мгновенную ось вращения. Положение мгновенной оси вращения относительно неподвижной системы отсчета и относительно самого тела, вообще говоря, меняется со временем. В случае катящегося цилиндра (рис. 82) мгновенная ось  $O'$  совпадает с линией касания цилиндра с плоскостью. При качении цилиндра мгновенная ось перемещается как по плоскости (т. е. относительно неподвижной системы отсчета), так и по поверхности цилиндра.

Скорости всех точек тела для каждого момента времени можно считать обусловленными вращением вокруг соответствующей мгновенной оси. Следовательно, плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей.

В общем случае движение (не плоское) можно представить как вращение вокруг мгновенной оси и происходящее одновременно поступательное перемещение вдоль этой оси.

### § 35. Движение центра инерции твердого тела

Разбив тело на элементарные массы  $\Delta m_i$ , можно представить его как систему материальных точек, взаимное расположение которых остается неизменным. Любая из этих элементарных масс может находиться под воздействием как внутренних сил, обусловленных ее взаимодействием с другими элементарными массами рассматриваемого тела, так и внешних сил. Например, если тело находится в поле сил земного тяготения, на каждую элементарную массу тела  $\Delta m_i$  будет действовать внешняя сила, равная  $\Delta m_i g$ .

Напишем для каждой элементарной массы уравнение второго закона Ньютона

$$\Delta m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \quad (35.1)$$

где  $\mathbf{f}_i$  — результирующая всех внутренних сил, а  $\mathbf{F}_i$  — результирующая всех внешних сил, приложенных к данной элементарной массе. Складывая уравнения (35.1) для всех элементарных масс, получим:

$$\sum \Delta m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i. \quad (35.2)$$

Однако сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю. Поэтому уравнение (35.2) упрощается следующим образом:

$$\sum \Delta m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i, \quad (35.3)$$

где справа получается результирующая всех внешних сил, действующих на тело. Сумму, стоящую в левой части уравнения (35.3), можно заменить произведением массы тела  $m$  на ускорение его центра инерции  $\mathbf{w}_c$ . Действи-

тельно, радиус-вектор центра инерции по определению [см. (23.1)] равен

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i}{m}.$$

Продифференцировав это соотношение дважды по времени и учитывая, что  $\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{w}_c$ , а  $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w}_i$ , можно написать:

$$m\mathbf{w}_c = \sum \Delta m_i \mathbf{w}_i. \quad (35.4)$$

Следовательно,

$$m\mathbf{w}_c = \sum \mathbf{F}_i, \quad (35.5)$$

откуда вытекает, что *центр инерции твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.*

Уравнение (35.5) дает возможность установить движение центра инерции твердого тела, если известна масса тела и действующие на него силы. В случае поступательного движения это уравнение будет определять ускорение не только центра инерции, но и любой другой точки тела.

### § 36. Вращение твердого тела. Момент силы

Чтобы выяснить, чем определяется характер вращения тела вокруг неподвижной оси, рассмотрим следующий опыт. Возьмем тело в виде легкой крестовины, на концах которой закреплены равные массивные грузы  $m$  (рис. 87). В центре крестовины укрепим ступенчатый шкив. Крестовину вместе со шкивом наденем на ось, позаботившись о том, чтобы трение при вращении вокруг этой оси было пренебрежимо мало.

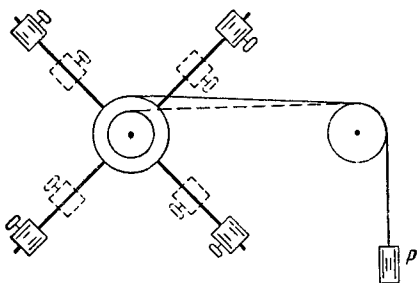


Рис. 87.

Прикрепим к одной из ступеней шкива конец нити, обмотаем ее вокруг шкива и, перебросив свободный конец нити через блок, подвесим к нему груз  $P$ . Если отпустить груз  $P$ , крестовина придет во вращение со все

возрастающей угловой скоростью  $\omega$ , причем вращение будет равномерно-ускоренным.

Варьируя величину груза  $P$ , радиус шкива  $l$ , массу грузов  $m$  и их расстояние  $R$  от оси вращения, исследуем, как эти факторы влияют на величину углового ускорения  $\beta$ . Результаты подобного исследования сводятся к тому, что угловое ускорение  $\beta$

1) прямо пропорционально натяжению нити  $f$  и радиусу шкива  $l$ ;

2) обратно пропорционально массе грузов  $m$  и квадрату их расстояния  $R$  от оси вращения.

Следовательно, ускорение вращательного движения зависит не только от величины действующей на тело силы  $f$ , но и от расстояния  $l$  от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила. Произведение  $fl$  дает величину так называемого момента силы относительно оси вращения.

Из рассмотренного опыта следует также, что на величину углового ускорения оказывает влияние не только масса вращающегося тела, но и распределение массы относительно оси вращения. Величина, учитывающая оба эти обстоятельства, носит название момента инерции тела относительно оси вращения.

Итак, для изучения вращательного движения необходимо ввести в рассмотрение две новые физические величины — момент силы и момент инерции.

Начнем с выяснения понятия момента силы. Момент инерции будет рассмотрен в следующих параграфах.

**Момент силы относительно точки.** Моментом силы  $f$  относительно некоторой точки  $O$  называется векторная величина  $M$ , определяемая выражением

$$M = [rf], \quad (36.1)$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку приложения силы.

Поясняющий это определение рис. 88 выполнен в предположении, что точка  $O$ , относительно которой берется момент, и вектор  $f$  лежат в плоскости рисунка. Тогда и вектор  $r$  располагается в этой плоско-

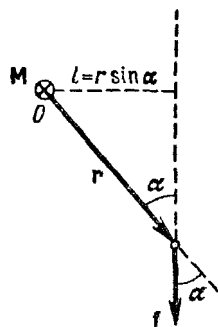


Рис. 88.

сти, вектор же  $\mathbf{M}$  перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен от нас. Вектор  $\mathbf{M}$  изображен кружком с вписанным в него крестиком<sup>1)</sup>.

Из определения (36.1) следует, что  $\mathbf{M}$  является аксиальным вектором. Его направление выбрано так, что вращение вокруг точки  $O$  в направлении силы и вектор  $\mathbf{M}$  образуют правовинтовую систему.

Модуль вектора  $\mathbf{M}$  равен

$$M = r f \sin \alpha = l f, \quad (36.2)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{f}$ , а  $l = r \sin \alpha$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую, вдоль которой действует сила (см. рис. 88). Эта длина называется плечом силы относительно точки  $O$ .

Формулам (36.1) и (36.2) для момента силы и его модуля можно придать иной вид. Для этого разложим вектор силы  $\mathbf{f}$  на две составляющие: коллинеарную с  $\mathbf{r}$  составляющую  $\mathbf{f}_r$  и перпендикулярную к  $\mathbf{r}$  составляющую  $\mathbf{f}_\tau$

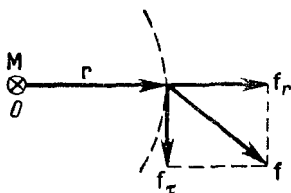


Рис. 89.

(рис. 89). Если представить себе окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ , то составляющая  $\mathbf{f}_\tau$  будет направлена по касательной к окружности. Заменим в формуле (36.1) вектор  $\mathbf{f}$  суммой  $\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\tau$  и воспользуемся свойством дистрибутивности векторного произведения:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{f}] = [\mathbf{r}, (\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\tau)] = [\mathbf{r}, \mathbf{f}_r] + [\mathbf{r}, \mathbf{f}_\tau].$$

Первое слагаемое в полученном нами выражении равно нулю, так как векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{f}_r$  коллинеарны. Следовательно, момент силы относительно точки можно представить в виде:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{f}_\tau]. \quad (36.3)$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем векторы, перпендикулярные к плоскости рисунка, мы будем изображать кружком с крестиком, если вектор направлен от нас, и кружком с точкой в его центре, если вектор направлен на нас. Для наглядности можно представлять себе вектор в виде стрелы с конусообразным наконечником и крестообразным оперением на хвосте. Тогда, если вектор направлен на нас (стрела летит к нам), мы увидим кружок с точкой, если же вектор направлен от нас (стрела летит от нас), мы увидим кружок с крестиком.

Поскольку векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{f}_\tau$  взаимно перпендикулярны, модуль вектора  $\mathbf{M}$  равен

$$M = r f_\tau. \quad (36.4)$$

Из дистрибутивности векторного произведения вытекает, что момент суммы сил, имеющих общую точку приложения, равен сумме моментов слагаемых сил:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{f}] = [\mathbf{r}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \dots)] = [\mathbf{r}\mathbf{f}_1] + [\mathbf{r}\mathbf{f}_2] + \dots = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots \quad (36.5)$$

**Момент пары сил.** Парой сил называются две равные по величине противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной и той же прямой (рис. 90). Расстояние  $l$  между прямыми, вдоль которых действуют

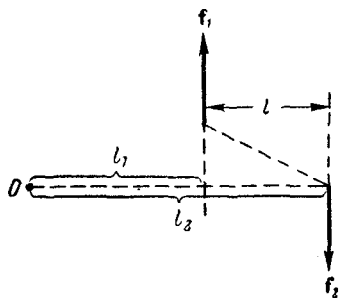


Рис. 90.

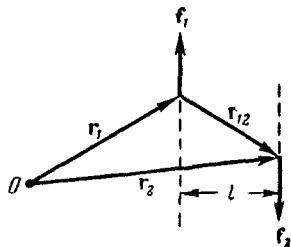


Рис. 91.

силы, называется плечом пары. Покажем, что момент пары сил относительно любой точки будет один и тот же. Сделаем это сначала для точки, лежащей в плоскости, в которой действуют силы (см. рис. 90). Обозначим одинаковый модуль сил  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  буквой  $f$ . Момент силы  $\mathbf{f}_1$  равен  $f l_1$  и направлен на нас, момент силы  $\mathbf{f}_2$  равен  $f l_2$  и направлен за чертеж. Результирующий момент направлен за чертеж и равен

$$M = f l_2 - f l_1 = f (l_2 - l_1) = f l.$$

Полученное выражение не зависит от положения точки  $O$  на плоскости, на которой лежит пара сил.

Теперь выберем точку  $O$  совершенно произвольным образом (рис. 91). Проведем из этой точки радиусы-



векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  точек приложения сил  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$ . Из точки приложения силы  $\mathbf{f}_1$  в точку приложения силы  $\mathbf{f}_2$  проведем вектор  $\mathbf{r}_{12}$ . Очевидно, что

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{12}. \quad (36.6)$$

Суммарный момент сил  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1 \mathbf{f}_1] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{f}_2].$$

Заменяя  $\mathbf{r}_2$  согласно (36.6) и используя дистрибутивность векторного произведения, можно написать:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{f}_1] + [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{12}) \mathbf{f}_2] = \\ &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{f}_1] + [\mathbf{r}_1 \mathbf{f}_2] + [\mathbf{r}_{12} \mathbf{f}_2]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$ , первые два слагаемых взаимно уничтожаются и окончательно получается:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_{12} \mathbf{f}_2].$$

Таким образом, момент пары сил перпендикулярен к плоскости, в которой лежат силы (рис. 92), и численно равен произведению модуля любой из сил на плечо.

**Момент силы относительно оси.** Если тело может вращаться относительно точки  $O$  произвольным образом, то под действием силы  $\mathbf{f}$  тело повернется вокруг

оси, перпендикулярной к плоскости, в которой лежат сила и точка  $O$ , т. е. вокруг оси, совпадающей с направлением момента силы относительно данной точки. Величина момента характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси.

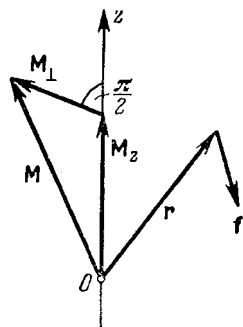


Рис. 93.

Если тело может вращаться только вокруг некоторой фиксированной оси, способность силы вращать тело вокруг этой оси характеризуется величиной, которая называется моментом силы относительно оси.

Чтобы выяснить, что такое момент силы  $\mathbf{f}$  относительно оси, найдем момент  $\mathbf{f}$  относительно точки  $O$  и отложим вектор  $\mathbf{M}$  этого момента из точки  $O$  (рис. 93;

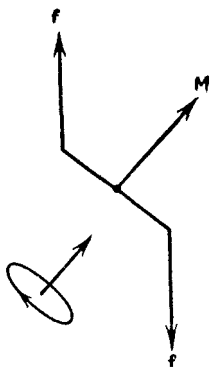


Рис. 92.

предполагается, что векторы  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{M}$  не лежат в плоскости рисунка). Проведем через точку  $O$  ось, которую мы назовем осью  $z$ , и разложим вектор  $\mathbf{M}$  на две составляющие:  $\mathbf{M}_z$  — параллельную оси<sup>1)</sup> и  $\mathbf{M}_\perp$  — перпендикулярную к оси.

Параллельную оси  $z$  составляющую момента силы относительно точки  $O$  (лежащей на оси) называют моментом силы относительно оси. Обозначив момент силы относительно оси символом  $M_z$ , можно написать:

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{f}]_z. \quad (36.7)$$

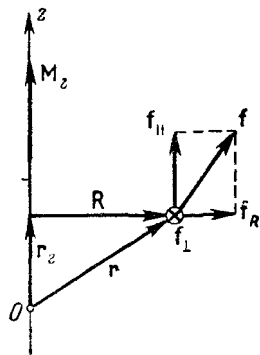


Рис. 94.

При заданном  $\mathbf{M}$  величина и направление вектора  $\mathbf{M}_z$  зависят от выбора оси  $z$ . Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{M}$ , то  $\mathbf{M}_z$  будет равен  $\mathbf{M}$ , если ось  $z$  перпендикулярна к вектору  $\mathbf{M}$ , то  $\mathbf{M}_z = 0$ .

Выражение (36.7) для  $M_z$  можно сделать более наглядным. Для этого представим радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в виде суммы двух составляющих:  $\mathbf{r}_z$  — параллельной оси и  $\mathbf{R}$  — перпендикулярной к оси (рис. 94). Тогда момент силы относительно оси  $z$  можно записать в виде

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{f}]_z = [(\mathbf{r}_z + \mathbf{R}), \mathbf{f}]_z = [\mathbf{r}_z, \mathbf{f}]_z + [\mathbf{R}\mathbf{f}]_z.$$

Но вектор  $[\mathbf{r}_z, \mathbf{f}]$  перпендикулярен к оси  $z$ ; следовательно, его составляющая по этой оси равна нулю. Поэтому мы приходим к формуле:

$$M_z = [\mathbf{R}\mathbf{f}]_z. \quad (36.8)$$

Теперь представим вектор силы  $\mathbf{f}$  в виде суммы трех составляющих:  $\mathbf{f}_\parallel$  — параллельной оси  $z$ ,  $\mathbf{f}_R$  — коллинеарной вектору  $\mathbf{R}$  и, наконец,  $\mathbf{f}_\tau$  — перпендикулярной к плоскости, проходящей через ось  $z$  и вектор  $\mathbf{R}$ . На рис. 94 эта составляющая изображена кружком с крестиком.

<sup>1)</sup> Составляющую  $M_z$  нужно отличать от проекции вектора  $\mathbf{M}$  на ось  $z$ , обозначаемой символом  $M_z \cdot \mathbf{e}_z$  — вектор,  $M_z$  — скалярная алгебраическая величина; между ними имеется простая связь:  $\mathbf{M}_z = \mathbf{e}_z M_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор (орт) оси  $z$  [этот орт обозначают также символом  $\mathbf{k}$ ; см. формулу (2.8)].

стиком. Если представить себе окружность радиуса  $R$  с центром на оси  $z$ , то составляющая  $f_\tau$  будет направлена по касательной к этой окружности. Заменяем в (36.8) вектор  $f$  суммой перечисленных выше составляющих:

$$M_z = [Rf]_z = [R, (f_{\parallel} + f_R + f_\tau)]_z = [R, f_{\parallel}]_z + [R, f_R]_z + [R, f_\tau]_z.$$

Рассмотрим каждое из трех слагаемых в отдельности. Вектор  $[R, f_{\parallel}]$  перпендикулярен к оси  $z$ , поэтому его составляющая по оси равна нулю. Вектор  $[R, f_R]$  сам по себе равен нулю, так как образующие его сомножители коллинеарны. Следовательно, первые два слагаемые равны нулю. Вектор  $[R, f_\tau]$  параллелен оси  $z$  (оба образующие его сомножителя перпендикулярны к оси  $z$ ), так что его составляющая по оси равна ему самому:  $[R, f_\tau]_z = [R, f_\tau]$ . Таким образом, мы приходим к формуле:

$$M_z = [R, f_\tau]. \quad (36.9)$$

Векторы  $R$  и  $f_\tau$  взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль вектора  $M_z$  равен

$$|M_z| = Rf_\tau \quad (36.10)$$

Величина  $R$  называется плечом силы  $f_\tau$  относительно оси  $z$ .

Из выражения (36.9) легко заключить, что момент  $M_z$  характеризует способность силы  $f$  повернуть тело, к которому она приложена, вокруг оси  $z$ . Действительно, составляющие  $f_{\parallel}$  и  $f_R$  не могут вызвать вращения вокруг оси  $z$ . Следовательно, рассматриваемый нами поворот может быть вызван только составляющей  $f_\tau$ , причем эта составляющая тем успешнее осуществит поворот, чем больше ее плечо  $R$ .

Для момента относительно оси также справедливо соотношение (36.5), т. е. момент результирующей равен сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси:

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} + \dots \quad (36.11)$$

<sup>1</sup>) Нельзя обозначить модуль  $M_z$  символом  $M_z$ , так как последний символ обозначает проекцию вектора  $M$  на ось  $z$ , которая может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Модуль же вектора всегда положителен. Справедливо соотношение:  $|M_z| = |M_z|$ .

Суммарный момент внутренних сил. Силы, с которыми взаимодействуют друг с другом две любые элементарные массы, лежат на одной и той же прямой (рис. 95). Их моменты относительно произвольной точки  $O$  равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравниваются друг друга, и сумма моментов всех внутренних сил для любой системы материальных точек, в частности для твердого тела, всегда равна нулю. Это утверждение справедливо как для суммарного момента всех внутренних сил, взятого относительно любой

точки, так и для суммарного момента этих сил, взятого относительно любой оси.

Рис. 95.

### § 37. Момент импульса материальной точки. Закон сохранения момента импульса

Аналогично моменту силы определяется момент импульса (момент количества движения) материальной точки. Момент импульса относительно точки  $O$  равен

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = m[\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad (37.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в ту точку пространства, в которой находится материальная точка (рис. 96; вектор  $\mathbf{f}$  понадобится нам в дальнейшем),  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс точки [ср. с формулой (36.1)].

Введя плечо  $l = r \sin \alpha$ , модуль вектора момента импульса можно записать в виде:

$$L = rp \sin \alpha = lp. \quad (37.2)$$

Моментом импульса относительно оси  $z$  называется составляющая  $L_z$  по этой оси момента импульса  $\mathbf{L}$

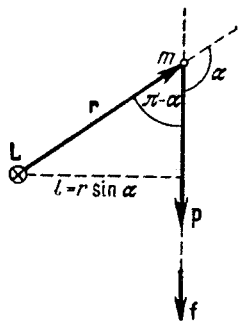


Рис. 96.

относительно точки  $O$ , лежащей на оси (рис. 97):

$$L_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z. \quad (37.3)$$

Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (36.9), найдем, что

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{R}, \mathbf{p}_\tau] = m [\mathbf{R}, \mathbf{v}_\tau], \quad (37.4)$$

где  $\mathbf{R}$  — составляющая радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , перпендикулярная к оси  $z$ , а  $\mathbf{p}_\tau$  — составляющая вектора  $\mathbf{p}$ , перпендикулярная к плоскости, проходящей через ось  $z$  и точку  $m$ .

Выясним, чем определяется изменение момента импульса со временем. Для этого продифференцируем (37.1) по времени  $t$ , воспользовавшись правилом дифференцирования произведения:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \left[ \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]. \quad (37.5)$$

Первое слагаемое равно нулю, так как оно представляет собой векторное произведение векторов

одинакового направления. В самом деле, вектор  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  равен вектору скорости  $\mathbf{v}$  и, следовательно, совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Вектор  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  по второму закону Ньютона равен действующей на тело силе  $\mathbf{f}$  [см. (22.3)]. Следовательно, выражение (37.5) можно написать так:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \mathbf{M}, \quad (37.6)$$

где  $\mathbf{M}$  — момент приложенных к материальной точке сил, взятый относительно той же точки  $O$ , относительно которой берется момент импульса  $\mathbf{L}$ .

Из соотношения (37.6) следует, что если результирующий момент действующих на материальную точку сил относительно какой-либо точки  $O$  равен нулю, то момент импульса материальной точки, взятый относительно той же точки  $O$  будет оставаться постоянным.

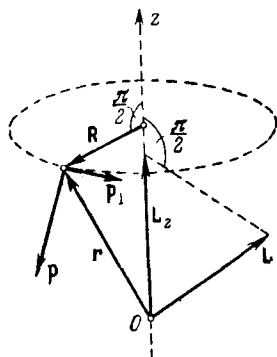


Рис. 97.

Взяв составляющие по оси  $z$  от векторов, входящих в формулу (37.6), получим выражение<sup>1)</sup>:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (37.7)$$

Формула (37.6) похожа на формулу (22.3). Из сравнения этих формул вытекает, что подобно тому, как производная по времени от импульса равна силе, действующей на материальную точку, производная по времени от момента импульса равна моменту силы.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Пусть материальная точка  $m$  движется вдоль пунктирной прямой на рис. 96. Поскольку движение прямолинейно, импульс материальной точки изменяется только по модулю, причем

$$\frac{dp}{dt} = f,$$

где  $f$  — модуль силы [в рассматриваемом случае  $f$  имеет такое же направление, как  $p$  (см. рис. 96), так что  $\frac{dp}{dt} > 0$ ].

Плечо  $l$  остается неизменным. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (lp) = l \frac{dp}{dt} = lf = M,$$

<sup>1)</sup> Согласно формуле (2.11)

$$\left( \frac{dL}{dt} \right)_{\text{пр } z} = \frac{d}{dt} L_z,$$

где  $\left( \frac{dL}{dt} \right)_{\text{пр } z}$  — проекция на ось  $z$  вектора  $\frac{dL}{dt}$ , а  $L_z$  — проекция на ось  $z$  вектора  $L$ . Умножим обе части равенства на орт  $e_z$  оси  $z$  и, учтя, что  $e_z$  от  $t$  не зависит, внесем его в правой части под знак производной. В результате получим:

$$\left( \frac{dL}{dt} \right)_{\text{пр } z} e_z = \frac{d}{dt} (L_z e_z).$$

Но произведение  $e_z$  на проекцию вектора на ось  $z$  дает составляющую этого вектора по оси  $z$  (см. сноску на стр. 132). Следовательно,

$$\left( \frac{dL}{dt} \right)_z = \frac{d}{dt} L_z,$$

где  $\left( \frac{dL}{dt} \right)_z$  — составляющая по оси  $z$  вектора  $\frac{dL}{dt}$ .

что согласуется с формулой (37.6) (в данном случае  $L$  изменяется только по модулю, причем увеличивается, поэтому  $\left| \frac{dL}{dt} \right| = \frac{dL}{dt}$ ).

Пример 2. Материальная точка массы  $m$  движется по окружности радиуса  $R$  (рис. 98). Момент импульса материальной точки относительно центра окружности  $O$  равен по модулю:

$$L = mvR. \quad (37.8)$$

Вектор  $L$  перпендикулярен к плоскости окружности, причем направление движения точки и вектор  $L$  образуют правовинтовую систему.

Поскольку плечо, равное  $R$ , остается постоянным, момент импульса может изменяться только за счет изменения модуля скорости. При равномерном движении материальной точки по окружности момент импульса остается постоянным и по величине и по направлению. Легко сообразить, что в этом случае момент силы, действующей на материальную точку, равен нулю.

Пример 3. Рассмотрим движение материальной точки в центральном поле сил (см. § 26). В соответствии с (37.6) момент импульса материальной точки, взятый относительно центра сил, должен оставаться постоянным по величине и направлению (момент центральной силы относительно центра равен нулю). Радиус-вектор  $r$ , проведенный из центра сил в точку  $m$ , и вектор  $L$  перпендикулярны друг к другу. Поэтому вектор  $r$  остается все время в одной и той же плоскости, перпендикулярной к направлению  $L$ . Следовательно, движение материальной точки в центральном поле сил будет происходить по кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр сил.

В зависимости от знака центральных сил (т. е. от того, являются они силами притяжения или отталкивания), а также от начальных условий траектория представляет собой гиперболу, параболу или эллипс (в частности, окружность). Например, Земля движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой помещается Солнце.

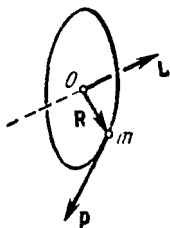


Рис. 98.

**Закон сохранения момента импульса.** Рассмотрим систему из  $N$  материальных точек. Подобно тому, как это делалось в § 23, разобьем силы, действующие на точки, на внутренние и внешние. Результирующий момент внутренних сил, действующих на  $i$ -ю материальную точку, обозначим символом  $\mathbf{M}'_i$ , результирующий момент внешних сил, действующих на ту же точку, — символом  $\mathbf{M}_i$ . Тогда уравнение (37.6) для  $i$ -й материальной точки будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Это выражение представляет собой совокупность  $N$  уравнений, отличающихся друг от друга значениями индекса  $i$ . Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}'_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i. \quad (37.9)$$

Величина

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] \quad (37.10)$$

называется моментом импульса системы материальных точек.

Сумма моментов внутренних сил [первая из сумм в правой части формулы (37.9)], как было показано в конце § 36, равна нулю. Следовательно, обозначив суммарный момент внешних сил символом  $\mathbf{M}$ , можно написать, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \mathbf{M} \quad (37.11)$$

[в символы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  в этой формуле вложен иной смысл, чем в такие же символы в формуле (37.6)].

Для замкнутой системы материальных точек  $\mathbf{M} = 0$ , вследствие чего суммарный момент импульса  $\mathbf{L}$  не зависит от времени. Таким образом, мы пришли к закону сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Отметим, что момент импульса остается постоянным и для системы, подвергающейся внешним воздействиям,



при условии, что суммарный момент внешних сил, действующих на тела системы, равен нулю.

Взяв от векторов, стоящих в левой и правой частях уравнения (37.11), их составляющие по оси  $z$ , придем к соотношению:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{zi} = M_z. \quad (37.12)$$

Может случиться, что результирующий момент внешних сил относительно точки  $O$  отличен от нуля ( $\mathbf{M} \neq 0$ ), однако равна нулю составляющая  $M_z$  вектора  $\mathbf{M}$  по некоторому направлению  $z$ . Тогда согласно (37.12) будет сохраняться составляющая  $L_z$  момента импульса системы по оси  $z$ .

### § 38. Основное уравнение динамики вращательного движения

Рассмотрим систему материальных точек, каждая из которых может как-то перемещаться, оставаясь в одной из плоскостей, проходящих через общую ось  $z$  (рис. 99). Все плоскости могут вращаться вокруг этой оси с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ .

Согласно формуле (11.5) тангенциальная составляющая скорости  $i$ -й точки может быть представлена в виде:

$$\mathbf{v}_{\tau i} = [\omega, \mathbf{R}_i],$$

где  $\mathbf{R}_i$  — перпендикулярная к оси  $z$  составляющая радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$  [ее модуль  $R_i$  дает расстояние точки от оси  $z$ ]. Подставив это значение  $\mathbf{v}_{\tau i}$  в формулу (37.4), получим выражение для момента импульса точки относительно оси  $z$ :

$$L_{zi} = m_i [\mathbf{R}_i, [\omega, \mathbf{R}_i]] = m_i R_i^2 \omega$$

[мы воспользовались соотношением (11.3); векторы  $\mathbf{R}_i$  и  $\omega$  взаимно перпендикулярны].

Просуммировав это выражение по всем точкам и вынеся общий множитель  $\omega$  за знак суммы, найдем для

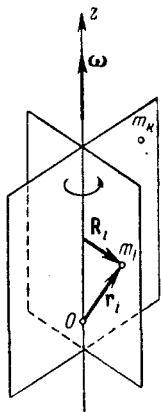


Рис. 99.

момента импульса системы относительно оси  $z$  следующее выражение:

$$\mathbf{L}_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2. \quad (38.1)$$

Физическая величина

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2, \quad (38.2)$$

равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний от оси  $z$ , называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси  $z$  (отдельно взятое слагаемое  $m_i R_i^2$  представляет собой момент инерции  $i$ -й материальной точки относительно оси  $z$ ).

С учетом (38.2) выражение (38.1) принимает вид:

$$\mathbf{L}_z = I_z \omega. \quad (38.3)$$

Подставив это выражение для  $\mathbf{L}_z$  в соотношение (37.12), придем к уравнению:

$$\frac{d}{dt} (I_z \omega) = \mathbf{M}_z, \quad (38.4)$$

которое является основным уравнением динамики вращательного движения. По форме оно сходно с уравнением второго закона Ньютона:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{f}.$$

В § 35 мы уже отмечали, что абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Для такой системы момент инерции  $I_z$  относительно фиксированной оси  $z$  есть величина постоянная. Следовательно, уравнение (38.4) переходит для абсолютно твердого тела в уравнение:

$$I_z \beta = \mathbf{M}_z, \quad (38.5)$$

где  $\beta = \dot{\omega}$  — угловое ускорение тела,  $\mathbf{M}_z$  — результирующий момент внешних сил, действующих на тело.

Уравнение (38.5) похоже по форме на уравнение:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{f}.$$

Сопоставив уравнения динамики вращательного движения с уравнениями динамики поступательного движения, легко заметить, что при вращательном движении роль силы играет момент силы, роль массы — момент инерции и т. д. (табл. 2)

Таблица 2

Поступательное движение	Вращательное движение
$mw = f$ $p = mv$ $\frac{dp}{dt} = f$ f — сила m — масса v — линейная скорость w — линейное ускорение p — импульс	$I_z \beta = M_z$ $L_z = I_z \omega$ $\frac{dL}{dt} = M$ M или $M_z$ — момент силы $I_z$ — момент инерции $\omega$ — угловая скорость $\beta$ — угловое ускорение L — момент импульса

Понятия момента силы и момента инерции были нами введены на основе рассмотрения вращения твердого тела. Однако следует иметь в виду, что эти величины существуют безотносительно к вращению. Так, например, любое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому как тело обладает массой независимо от состояния своего движения. Момент силы также существует независимо от того, вращается тело вокруг оси, относительно которой берется момент, или покоится. В последнем случае момент рассматриваемой силы, очевидно, уравновешивается моментами других сил, действующих на тело.

Из уравнения (38.5) вытекает, что при равенстве нулю результирующего момента всех внешних сил тело вращается с постоянной угловой скоростью. Если момент инерции тела может изменяться вследствие изменения взаимного расположения отдельных частей тела, при  $M_z = 0$  остается постоянным произведение  $I_z \omega$  [см. (38.4)] и изменение момента инерции  $I_z$  влечет за собой соответствующее изменение угловой скорости  $\omega$ . Этим объясняется обычно демонстрируемое явление, заключающееся в том, что человек, стоящий на вертящейся скамье, разводя руки в стороны, начинает вращаться

медленнее, а прижимая руки к туловищу, начинает вращаться быстрее.

Рассмотрим систему, состоящую из двух дисков, имеющих общую ось вращения (рис. 100). Между приливами дисков поместим сжатую пружину и свяжем эти приливы ниткой. Если пережечь нить, то под действием разжавшейся пружины оба диска придут во вращение в противоположных направлениях. Моменты импульса, которые приобретут диски, будут равны по величине и противоположны по направлению:

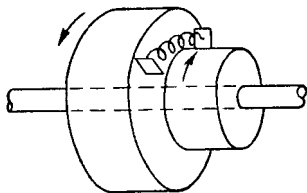


Рис. 100.

$$I_1\omega_1 = -I_2\omega_2,$$

так что суммарный момент импульса системы останется прежним равным нулю.

Подобным же образом обстоит дело и в случае изображенной на рис. 101 системы, состоящей из двух дисков с несовпадающими осями, укрепленными в раме, которая может свободно вращаться вокруг оси симметрии системы. Если пережечь нить, стягивающую приливы на дисках, между которыми заложена сжатая пружина, диски придут во вращение, причем, как легко видеть, в одинаковом направлении. Одновременно рама начнет вращаться в противоположную сторону, так что полный момент импульса системы как целого останется равным нулю.

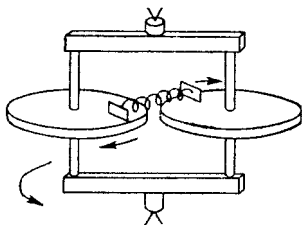


Рис. 101.

В обоих рассмотренных выше примерах вращение отдельных частей системы возникало под действием внутренних сил. Следовательно, внутренние силы, действующие между телами системы, могут вызвать изменения моментов импульса отдельных частей системы. Однако эти изменения будут всегда таковы, что суммарный момент импульса системы как целого остается без изменений. Полный момент импульса системы может изменяться только под воздействием внешних сил.

## § 39. Момент инерции

В предыдущем параграфе момент инерции был определен как сумма произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от оси [см. (38.2)]. Из определения следует, что момент инерции есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Распределение массы в пределах тела можно охарактеризовать с помощью величины, называемой плотностью. Если тело однородно, т. е. свойства его во всех точках одинаковы, то плотностью называется величина, равная

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (39.1)$$

где  $m$  — масса тела, а  $V$  — его объем. Таким образом, в случае однородного тела плотность представляет собой массу единицы объема тела.

Для тела с неравномерно распределенной массой выражение (39.1) дает среднюю плотность. Плотность в данной точке определяется в этом случае следующим образом:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (39.2)$$

В этом выражении  $\Delta m$  — масса, заключенная в объеме  $\Delta V$ , который при предельном переходе стягивается к той точке, в которой определяется плотность.

Предельный переход в (39.2) нельзя понимать так, что  $\Delta V$  стягивается буквально в точку. При таком понимании для двух практически совпадающих точек, одна из которых приходится на ядро атома, а другая — на промежуток между ядрами, получался бы сильно отличающийся результат (для первой точки огромная величина, для второй — нуль). Поэтому уменьшение  $\Delta V$  следует производить до тех пор, пока не будет получен физически бесконечно малый объем, под которым понимают такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы макроскопические (т. е. присущие большой совокупности атомов) свойства в пределах его можно было считать одинаковыми, а с другой стороны, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность (прерывность) вещества.

Согласно (39.2) элементарная масса  $\Delta m_i$  равна произведению плотности тела  $\rho_i$  в данной точке на соответствующий элементарный объем  $\Delta V_i$ :

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Следовательно, момент инерции можно представить в виде

$$I = \sum \rho_i r_i^2 \Delta V_i. \quad (39.3)$$

[мы заменили  $R_i$  в формуле (38.2) на  $r_i$ ].

Если плотность тела постоянна, ее можно вынести за знак суммы:

$$I = \rho \sum r_i^2 \Delta V_i. \quad (39.4)$$

Соотношения (39.3) и (39.4) являются приближенными, причем тем более точными, чем меньше элементарные объемы  $\Delta V_i$  и соответствующие им элементарные массы  $\Delta m_i$ . Следовательно, задача нахождения моментов инерции сводится к интегрированию:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \quad (39.5)$$

Интегралы в (39.5) берутся по всему объему тела. Величины  $\rho$  и  $r$  в этих интегралах являются функциями точки, т. е., например, декартовых координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

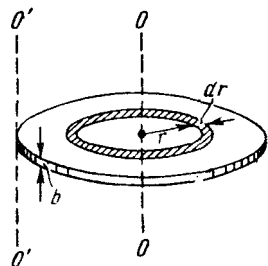


Рис. 102.

В качестве примера найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 102). Разобьем диск на кольцевые слои толщиной  $dr$ . Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном  $r$ . Объем такого слоя равен

$$dV = b2\pi r dr,$$

где  $b$  — толщина диска.

Поскольку диск однороден, плотность его во всех точках одинакова и  $\rho$  в (39.5) можно вынести за знак интеграла:

$$I = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr,$$

где  $R$  — радиус диска. Вынесем за знак интеграла постоянный множитель  $2\pi b$ :

$$I = 2\pi b\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b\rho \frac{R^4}{4}.$$

Наконец, введя массу диска  $m$ , равную произведению плотности  $\rho$  на объем диска  $b\pi R^2$ , получим:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (39.6)$$

Нахождение момента инерции в рассмотренном примере значительно упрощалось вследствие того, что тело было однородным и симметричным, а момент инерции мы искали относительно оси симметрии. Если бы мы захотели найти момент инерции диска относительно, например, оси  $O'O'$ , перпендикулярной к диску и проходящей через его край (см. рис. 102), вычисления, очевидно, оказались бы гораздо более сложными. В подобных случаях нахождение момента инерции значительно облегчается, если воспользоваться теоремой Штейнера, которая формулируется следующим образом: *момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_0$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $a$  между осями:*

$$I = I_0 + ma^2. \quad (39.7)$$

В соответствии с теоремой Штейнера момент инерции диска относительно оси  $O'O'$  равен найденному нами моменту инерции (39.6) относительно оси, проходящей через центр диска, плюс  $mR^2$  (расстояние между осями  $O'O'$  и  $OO$  равно радиусу диска  $R$ ):

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Таким образом, теорема Штейнера, по существу, сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела.

Для доказательства теоремы Штейнера рассмотрим тело произвольной формы (рис. 103). Возьмем две параллельные друг другу оси  $OO$  и  $O'O'$ , из которых одна (ось  $OO$ ) проходит через центр инерции тела. Свяжем с этими осями координатные оси  $xyz$  и  $x'y'z'$ , которые

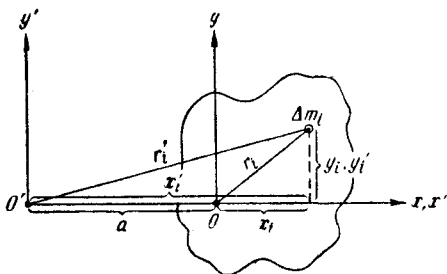


Рис. 103.

выберем так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью  $OO$ , а ось  $z'$  — с осью  $O'O'$  (на рис. 103 эти оси перпендикулярны к плоскости чертежа). Кроме того, оси  $x$  и  $x'$  выберем так, чтобы они совпадали и проходили через центр инерции тела. Тогда между координатами элементарной массы  $\Delta m_i$  будут иметь место следующие соотношения:

$$x'_i = a + x_i; \quad y'_i = y_i,$$

где  $a$  — расстояние между осями.

Квадрат расстояния  $\Delta m_i$  от оси  $OO$  равен

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (39.8)$$

квадрат же расстояния от оси  $O'O'$  равен

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2. \quad (39.9)$$

С учетом (39.8) момент инерции тела относительно оси  $OO$  определяется выражением

$$I_0 = \sum r_i^2 \Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i, \quad (39.10)$$

а момент инерции относительно оси  $O'O'$  [с учетом (39.9)] будет равен

$$I = \sum r_i'^2 \Delta m_i = \sum [(a + x_i)^2 + y_i^2] \Delta m_i. \quad (39.11)$$



Возведя в квадрат выражение, стоящее в круглых скобках, и сгруппировав соответствующим образом полученные слагаемые, выражение (39.11) можно привести к следующему виду:

$$I = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i. \quad (39.12)$$

Первая из сумм (39.12) тождественна с (39.10), т. е. представляет собой  $I_0$ ; вторая сумма дает  $ma^2$ ; третья же сумма, как легко видеть, равна нулю. В самом деле, поскольку ось  $z$  проходит через центр инерции тела, координата  $x_c$  центра инерции равна нулю. Вместе с тем по определению  $x_c = \frac{1}{m} \sum x_i \Delta m_i$ , откуда следует, что  $\sum x_i \Delta m_i$  равна нулю.

Таким образом, выражение (39.12) принимает вид

$$I = I_0 + ma^2,$$

что и требовалось доказать [см. (39.7)].

В заключение приведем значения моментов инерции для некоторых тел (тела предполагаются однородными,  $m$  — масса тела).

1. Тело представляет собой тонкий длинный стержень с сечением любой формы. Максимальный поперечный размер стержня  $b$  во много раз меньше длины

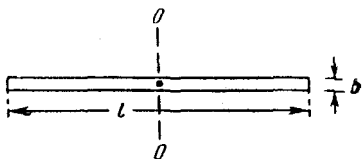


Рис. 104.

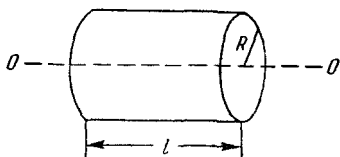


Рис. 105.

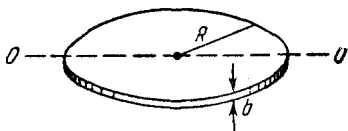


Рис. 106.

стержня  $l$  ( $b \ll l$ ). Момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (рис. 104), равен

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

2. Для диска или цилиндра при любом отношении  $R$  к  $l$  (рис. 105) момент инерции относительно оси,

совпадающей с геометрической осью цилиндра, равен

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

3. Тело — тонкий диск. Толщина диска  $b$  во много раз меньше радиуса диска  $R$  ( $b \ll R$ ). Момент инерции относительно оси, совпадающей с диаметром диска (рис. 106), равен

$$I = \frac{1}{4} mR^2.$$

4. Момент инерции шара радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через его центр, равен

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

#### § 40. Кинетическая энергия твердого тела

**Вращение тела вокруг неподвижной оси.** Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси, которую мы назовем осью  $z$ . Линейная скорость элементарной массы  $\Delta m_i$  может быть представлена в виде

$$v_i = R_i \omega,$$

где  $R_i$  — расстояние  $\Delta m_i$  от оси  $z$ . Следовательно, кинетическая энергия  $i$ -й элементарной массы равна

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i R_i^2 \omega^2.$$

Кинетическая энергия тела складывается из кинетических энергий его частей:

$$T = \sum \Delta T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Сумма в правой части этого соотношения представляет собой момент инерции тела  $I_z$  относительно оси вращения. Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (40.1)$$

Полученное выражение аналогично выражению для кинетической энергии тела, движущегося поступательно,

$T = \frac{mv^2}{2}$ . При вращательном движении роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости — угловая скорость.

**Работа внешних сил при вращении твердого тела.** Найдем работу, которую совершают внешние силы при вращении тела вокруг неподвижной оси  $z$ . Обозначим внешнюю силу, приложенную к элементарной массе  $\Delta m_i$ , через  $f_i$ . За время  $dt$   $i$ -я элементарная масса проходит путь (рис. 107)

$$ds_i = R_i d\varphi,$$

где  $d\varphi$  — угол, на которой поворачивается тело за время  $dt$ .

Работа силы  $f_i$  на этом пути определяется проекцией силы на направление перемещения, которую можно обозначить символом  $f_{\tau i}$  ( $\tau$  — единичный вектор касательной к окружности, по которой движется  $i$ -я элементарная масса; направление этого вектора совпадает с направлением перемещения в данный момент). Таким образом,

$$dA_i = f_{\tau i} ds_i = f_{\tau i} R_i d\varphi.$$

Но  $f_{\tau i} R_i$  равно модулю момента силы  $f_i$  относительно оси  $z$ , т. е.  $|M_{zi}|$ , взятому со знаком «+», если  $f_{\tau i}$  положительна, и со знаком «—», если  $f_{\tau i}$  отрицательна [см. формулу (36.10); в этой формуле  $f_{\tau}$  — не проекция, а модуль силы  $f_{\tau}$ ]. Следовательно,

$$dA_i = \pm |M_{zi}| d\varphi. \quad (40.2)$$

Элементарный угол поворота можно рассматривать как аксиальный вектор

$$d\varphi = \omega dt.$$

Легко сообразить, что работа  $dA_i$  будет положительна, когда вектор  $M_{zi}$  имеет такое же направление, как и  $d\varphi$ , и отрицательна, если направления векторов  $M_{zi}$  и  $d\varphi$  противоположны. Поэтому формуле (40.2) можно придать вид:

$$dA_i = M_{zi} d\varphi.$$

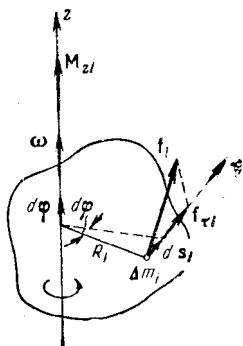


Рис. 107.

Работа всех сил, приложенных к телу, равна сумме работ, совершаемых отдельными силами:

$$dA = \sum dA_i = \sum \mathbf{M}_{zi} d\varphi = (\sum \mathbf{M}_{zi}) d\varphi.$$

Сумма, стоящая в скобках, дает результирующий момент  $\mathbf{M}_z$  всех приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения. Следовательно,

$$dA = \mathbf{M}_z d\varphi^1). \quad (40.3)$$

Это выражение аналогично выражению для работы при поступательном движении:  $dA = \mathbf{f} ds$ . Из сопоставления следует, что в случае вращения роль силы играет момент силы, а роль линейного перемещения  $ds = v dt$  — угловое перемещение  $d\varphi = \omega dt$ .

Практически для вычисления работы пользуются выражением

$$dA = M_\omega d\varphi = M_\omega \omega dt, \quad (40.4)$$

где под  $M_\omega$  подразумевается проекция результирующего момента приложенных к телу внешних сил на направление вектора  $\omega$ . Работа за конечный промежуток времени находится путем интегрирования выражения (40.4):

$$A = \int dA = \int_0^\varphi M_\omega d\varphi = \int_0^t M_\omega \omega dt. \quad (40.5)$$

Если проекция результирующего момента сил на направление  $\omega$  остается постоянной, ее можно вынести за знак интеграла:

$$A = M_\omega \int_0^\varphi d\varphi = M_\omega \varphi \quad (40.6)$$

( $\varphi$  — угол, на который поворачивается тело за время  $t$ ).

<sup>1)</sup> Повторив рассуждения для приложенных к элементарным массам внутренних сил  $\mathbf{f}'_i$ , мы пришли бы к формуле

$$dA = \mathbf{M}'_z d\varphi,$$

где  $\mathbf{M}'_z$  — результирующий момент всех внутренних сил. Этот момент, как мы знаем, равен нулю (см. последний абзац § 36). Следовательно, суммарная работа внутренних сил при вращении тела равна нулю.

**Кинетическая энергия тела при плоском движении.** Плоское движение тела, как мы видели в § 34, может быть представлено как наложение двух движений — поступательного с некоторой скоростью  $\mathbf{v}_0$  и вращения вокруг соответствующей оси. Свяжем с телом систему координат  $K'$ , ось  $z'$  которой направим вдоль вектора угловой скорости вращения тела  $\boldsymbol{\omega}$ . Согласно формуле (33.13) скорость  $i$ -й элементарной массы тела в неподвижной системе координат  $K$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_i],$$

где  $\mathbf{v}_0$  — скорость начала координат  $O'$  системы  $K'$ ,  $\mathbf{r}'_i$  — радиус-вектор, определяющий положение элементарной массы по отношению к точке  $O'$ .

Кинетическая энергия  $i$ -й элементарной массы равна <sup>1)</sup>

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i \{ \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_i] \}^2.$$

Осуществив возведение в квадрат, получим:

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \{ v_0^2 + 2\mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_i] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_i]^2 \}. \quad (40.7)$$

Векторное произведение  $\boldsymbol{\omega}$  на  $\mathbf{r}'_i$  можно, как мы знаем, заменить векторным произведением  $\boldsymbol{\omega}$  на  $\mathbf{R}_i$  — перпендикулярную к оси  $z'$  составляющую радиуса-вектора  $\mathbf{r}'_i$  [см. формулу (11.4) и следующий за ней текст]. Модуль этого векторного произведения равен  $\omega R_i$  ( $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{R}_i$  взаимно перпендикулярны). Следовательно,  $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_i]^2 = \omega^2 R_i^2$ . Подставим это значение в (40.7) и просуммируем  $\Delta T_i$  по всем элементарным массам. В результате мы получим кинетическую энергию тела:

$$T = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i v_0^2 + \sum \mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}, \sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i] + \frac{1}{2} \sum \omega^2 \Delta m_i R_i^2.$$

Вынесем всюду постоянные множители за знак суммы:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum \Delta m_i + \mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}, \sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i] + \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2$$

<sup>1)</sup> Напомним, что квадрат вектора равен квадрату его модуля:  $\mathbf{v}_i^2 = v_i^2$ .

(при преобразовании второго слагаемого в правой части равенства мы воспользовались дистрибутивностью векторного и скалярного произведений).

Сумма элементарных масс  $\sum \Delta m_i$  есть масса тела  $m$ . Выражение  $\sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i$  равно произведению массы тела на радиус-вектор  $\mathbf{r}'_C$  центра инерции тела в системе  $K'$  [см. формулу (23.1)]. Наконец,  $\sum \Delta m_i R_i^2$  дает момент инерции  $I_z$  тела относительно оси вращения  $z'$ . Поэтому можно написать, что

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + \mathbf{v}_0[\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{r}'_C] + \frac{I_z\omega^2}{2}. \quad (40.8)$$

Это выражение можно упростить, взяв в качестве точки  $O'$  центр инерции тела  $C$ , т. е. поместив начало системы координат  $K'$  в точку  $C$ . В этом случае  $\mathbf{r}'_C = 0$ , так что второе слагаемое исчезает. Поэтому, обозначив через  $\mathbf{v}_C$  скорость центра инерции, а через  $I_C$  — момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через точку  $C$ , получим для кинетической энергии тела формулу:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \quad (40.9)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра инерции, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции тела.

#### § 41. Применение законов динамики твердого тела

Как было установлено в предыдущих параграфах, движение твердого тела отвечает двум уравнениям [см. (35.5) и (38.5)]:

$$m\mathbf{w}_C = \sum \mathbf{f}_i, \quad (41.1)$$

$$I\beta = \sum \mathbf{M}_i. \quad (41.2)$$

Следовательно, движение тела определяется действующими на тело внешними силами  $\mathbf{f}_i$  и моментами этих сил  $\mathbf{M}_i$ . Моменты сил можно брать относительно любой

неподвижной или движущейся без ускорения оси (относительно той же оси берется и момент инерции  $I$ ). Взяв моменты внешних сил относительно оси, движущейся с ускорением, мы, по существу, написали бы уравнение (41.2) в неинерциальной системе отсчета. В этом случае, кроме внешних сил, приложенных к телу, нужно учитывать также силы инерции и их моменты.

Точки приложения сил  $f_i$ , действующих на тело, можно переносить вдоль линий их действия, поскольку при этом ни сумма  $\sum f_i$ , ни моменты  $M_i$  не изменяются (при переносе силы вдоль линии ее действия плечо относительно любой точки не изменяется). Осуществляя такой перенос, можно несколько сил заменять одной силой, эквивалентной им в отношении воздействия, оказываемого на движение тела. Так, например, две силы  $f_1$  и  $f_2$ , лежащие в одной плоскости (рис. 108), можно заменить эквивалентной им силой  $f$ , точку приложения которой можно также выбирать произвольно на направлении, вдоль которого она действует.

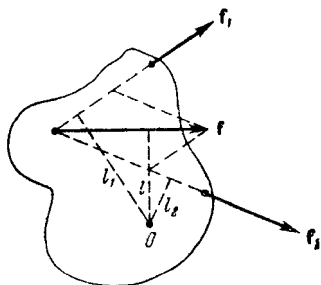


Рис. 108.

Совокупность действующих на тело параллельных сил можно заменить их равнодействующей, равной сумме всех сил и приложенной к такой точке тела, чтобы ее момент был равен сумме моментов отдельных сил.

Найдем равнодействующую сил тяжести. Силы тяжести приложены ко всем элементам твердого тела, причем сила, действующая на элементарную массу  $\Delta m_i$ , равна  $\Delta m_i g$ . Сумма этих сил равна  $P = mg$ . Суммарный момент сил тяжести относительно любой точки  $O$  равен

$$M = \sum [r_i, (\Delta m_i g)],$$

где  $r_i$  — радиус-вектор, определяющий положение  $\Delta m_i$  относительно точки  $O$ . Перенеся скалярный множитель  $\Delta m_i$  из второго сомножителя в первый и вынеся общий множитель  $g$  за знак суммы, получим:

$$M = [(\sum \Delta m_i r_i), g].$$

Но сумма, стоящая в круглых скобках, равна произведению массы тела  $m$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}_C$  центра инерции  $C$ . Поэтому

$$\mathbf{M} = [(m\mathbf{r}_C), \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_C, (m\mathbf{g})] = [\mathbf{r}_C, \mathbf{P}], \quad (41.3)$$

т. е. суммарный момент сил тяжести относительно любой точки совпадает с моментом силы  $m\mathbf{g}$ , приложенной к точке  $C$ .

Таким образом, равнодействующая сил тяжести равна  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$  и приложена к центру инерции тела.

Из (41.3) вытекает, что момент сил тяжести относительно центра инерции равен нулю (в этом случае  $\mathbf{r}_C = 0$ ). Точка, относительно которой момент сил тяжести равен нулю, называется центром тяжести тела. Как уже отмечалось в § 23, центр тяжести совпадает с центром инерции тела. Правда, это утверждение справедливо только в том случае, когда поле сил тяготения в пределах данного тела можно считать однородным, т. е. когда силы, приложенные к различным элементарным массам, имеют одинаковое направление и пропорциональны массе. Это условие выполняется для тела, размеры которого значительно меньше размеров земного шара.

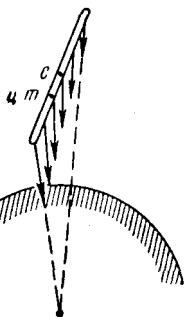


Рис. 109.

Если размеры сравнимы с размерами Земли, центр тяжести и центр инерции, вообще говоря, не совпадают. Поясним это простым примером. Однородный длинный стержень находится вблизи Земли (рис. 109). При таком расположении стержня, как на рисунке, силы тяготения, приложенные к различным его элементам, примерно параллельны. Величина же приложенных к равным элементам сил изменяется с расстоянием от Земли по закону  $1/r^2$  ( $r$  — расстояние элемента от центра Земли). Очевидно, что центр тяжести в этом случае смещен относительно центра инерции к концу стержня, более близкому к Земле.

Таким же свойством, как у сил тяжести (в случае однородного поля сил), обладают силы инерции, вводимые при рассмотрении движения тела в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно относительно



но инерциальной системы. Действительно, силы инерции, приложенные к элементарным массам  $\Delta m_i$  равны  $-\Delta m_i \mathbf{w}_0$ , т. е. имеют одинаковое направление и пропорциональны массе (для всех точек неинерциальной системы, движущейся поступательно,  $\mathbf{w}_0$  одинаково). Повторив рассуждение, приведшее нас к формуле (41.3), можно показать, что результирующая сил инерции равна  $-m\mathbf{w}_0$  ( $m$  — масса тела) и приложена к центру инерции.

Относительно оси, связанной с поступательно движущейся неинерциальной системой отсчета (т. е. оси, движущейся поступательно в инерциальной системе) и проходящей через центр инерции тела, момент сил инерции равен нулю (результирующая сил инерции в этом случае, как мы видели, приложена к центру инерции). Поэтому уравнение (41.2) можно писать относительно такой оси, не учитывая сил инерции. Подчеркнем еще раз, что так можно поступать только в отношении оси, проходящей через центр инерции и не изменяющей своего направления (не поворачивающейся) по отношению к инерциальной системе отсчета. При плоском движении такой осью является ось, проходящая через центр инерции и перпендикулярная к плоскости, в которой происходит движение.

**Условия равновесия твердого тела.** Тело может оставаться в состоянии покоя в том случае, если нет причин, приводящих к возникновению поступательного движения или вращения. В соответствии с (41.1) и (41.2) для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:

1) сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum \mathbf{f}_i = 0, \quad (41.4)$$

2) результирующий момент внешних сил относительно любой неподвижной оси должен быть равен нулю:

$$\sum \mathbf{M}_i = 0. \quad (41.5)$$

Практически оказывается достаточным, чтобы условие (41.5) выполнялось для трех любых неподвижных осей, не лежащих в одной плоскости (например, для

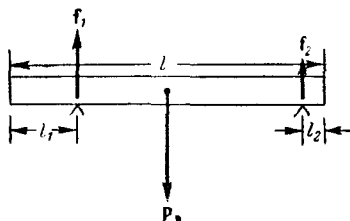
координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ ). Тогда оно будет выполняться и для любой иной оси.

Соотношения (41.4) и (41.5) и являются условиями равновесия твердого тела.

### Примеры на применение законов механики твердого тела

**Пример 1.** Дана однородная балка, лежащая на двух опорах (рис. 110). Определить реакции опор  $f_1$  и  $f_2$ .

Равнодействующая сил тяжести равна  $P$  и приложена к центру инерции. Балка неподвижна. Поэтому согласно (41.4) сумма сил  $P$ ,  $f_1$  и  $f_2$  должна быть равна нулю. Отсюда следует, что



$$P = f_1 + f_2,$$

где  $P$ ,  $f_1$  и  $f_2$  — модули составляющих сил.

Результирующий момент всех действующих на балку сил относительно любой оси также должен быть равен нулю (см. (41.5)), в частности, должен быть равен нулю момент относительно левой точки опоры, что дает:

$$P \left( \frac{l}{2} - l_1 \right) = f_2 (l - l_1 - l_2).$$

Мы получили два уравнения с неизвестными  $f_1$  и  $f_2$ . Решая их, находим:

$$f_1 = \frac{P}{2} \frac{l - 2l_2}{l - (l_1 + l_2)};$$

$$f_2 = \frac{P}{2} \frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}.$$

**Пример 2.** Однородный цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m$  скатывается без скольжения с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен  $\varphi$  (рис. 111), а высота  $h$  ( $h \gg R$ ). Начальная скорость цилиндра равна нулю. Найти скорость центра инерции и угловую скорость вращения цилиндра в момент выхода цилиндра на горизонтальный участок.

Дадим два варианта решения.

1-й способ решения. Цилиндр будет двигаться под действием трех сил:  $P = mg$ , силы трения  $f_{\text{тр}}$  и реакции наклонной плоскости  $f_r$ . Реакция  $f_r$  в соответствии с третьим законом Ньютона равна по модулю нормальной составляющей силы  $P$ , имеющей величину  $mg \cos \varphi$ .

Трение между цилиндром и наклонной плоскостью возникает в точках их соприкосновения. Поскольку эти точки цилиндра в каждый момент времени неподвижны

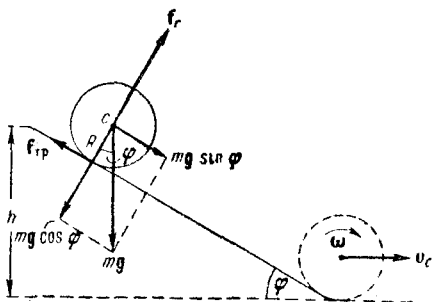


Рис. III.

(они образуют мгновенную ось вращения), сила трения, о которой идет речь, будет силой трения покоя. Как известно из § 19, сила трения покоя может иметь величину в пределах от нуля до максимального значения  $f_0$ , которое определяется произведением коэффициента трения на силу нормального давления, прижимающую друг к другу соприкасающиеся тела ( $f_0 = kmg \cos \varphi$ ). В данном случае сила трения принимает такое значение, чтобы отсутствовало скольжение. Скольжение при качении цилиндра по плоскости будет отсутствовать при условии, что линейная скорость точек соприкосновения будет равна нулю, что в свою очередь выполняется, если скорость центра инерции  $v_c$  равна в каждый момент времени угловой скорости вращения цилиндра  $\omega$ , умноженной на радиус цилиндра  $R$ :

$$v_c = \omega R. \quad (41.6)$$

Соответственно ускорение центра инерции  $w_c$  будет равно угловому ускорению  $\beta$ , умноженному на  $R$ :

$$w_c = \beta R. \quad (41.7)$$

Если необходимая для соблюдения этих условий сила трения  $f_{\text{тр}}$  не превышает максимального значения  $f_0 = kmg \cos \varphi$ , цилиндр будет скатываться без скольжения. В противном случае скатывание без скольжения невозможно.

При отсутствии скольжения<sup>1)</sup> уравнение (41.1), спроектированное на направление движения, имеет вид

$$m\omega_C = mg \sin \varphi - f_{\text{тр}}. \quad (41.8)$$

В уравнении (41.2), написанном относительно оси цилиндра, будет отличен от нуля только момент силы трения. Остальные силы, в том числе и результирующая сил инерции, имеют направления, проходящие через ось цилиндра, вследствие чего их моменты относительно этой оси равны нулю. Таким образом, уравнение (40.2) запишется следующим образом:

$$I\beta = Rf_{\text{тр}}, \quad (41.9)$$

где  $I$  — момент инерции цилиндра относительно его оси, равный для сплошного однородного цилиндра  $\frac{1}{2} mR^2$ .

В уравнениях (41.8) и (41.9) содержатся три неизвестные величины:  $f_{\text{тр}}$ ,  $\beta$  и  $\omega_C$ . Но между последними двумя величинами имеется связь (41.7), вытекающая из отсутствия скольжения. Решая совместно уравнения (41.7) — (41.9), найдем (с учетом того, что  $I = \frac{1}{2} mR^2$ ):

$$f_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mg \sin \varphi, \quad (41.10)$$

$$\omega_C = \frac{2}{3} g \sin \varphi, \quad (41.11)$$

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \varphi. \quad (41.12)$$

Теперь, когда мы знаем величину силы трения покоя (41.10), обеспечивающую скатывание цилиндра без скольжения, можно установить условие, при котором такое скатывание возможно. Для скатывания без скольжения сила (41.10) не должна превышать максималь-

<sup>1)</sup> При наличии скольжения сила  $f_{\text{тр}}$  в (41.8) будет не силой трения покоя, а силой трения скольжения.

ного значения силы трения покоя  $f_0$ , равного, как мы видели,  $km g \cos \varphi$ :

$$\frac{1}{3} mg \sin \varphi \leq km g \cos \varphi.$$

Отсюда получается, что

$$\operatorname{tg} \varphi \leq 3k.$$

Если тангенс угла наклона плоскости  $\varphi$  превышает утроенное значение коэффициента трения покоя между цилиндром и плоскостью, скатывание не может происходить без скольжения.

Как следует из (41.11), центр инерции цилиндра движется равномерно-ускоренно. Зная ускорение  $\omega_C$ , можно найти время скатывания цилиндра  $t_{\text{ск}}$ , т. е. время, за которое цилиндр пройдет путь, равный  $h/\sin \varphi$ . Этот путь связан с  $\omega_C$  и  $t_{\text{ск}}$  следующим соотношением:

$$\frac{h}{\sin \varphi} = \frac{\omega_C t_{\text{ск}}^2}{2},$$

откуда, подставляя значение (41.11) для  $\omega_C$ , получаем:

$$t_{\text{ск}} = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Это время, как и  $\omega_C$ , не зависит от массы и радиуса цилиндра<sup>1)</sup>; оно определяется только углом наклона плоскости  $\varphi$  и разностью уровней ее краев  $h$ .

Скорость центра инерции при выходе цилиндра на горизонтальный участок будет равна

$$v_C = \omega_C t_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{4}{3} gh},$$

а угловая скорость цилиндра

$$\omega = \beta t_{\text{ск}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

Отметим, что сила трения (41.10) работы над цилиндром не совершает, так как точки цилиндра, к которым приложена эта сила, в каждый момент времени неподвижны.

---

<sup>1)</sup> Это справедливо только для однородного сплошного цилиндра.

Для горизонтальной плоскости ( $\varphi = 0$ ) по формулам (41.11) и (41.12) получается, что цилиндр, если ему сообщить предварительно некоторую поступательную и соответствующую (такую, чтобы не было скольжения) угловую скорость, будет двигаться без ускорения. На самом деле движение будет замедленным. Это замедление обуславливается, силой трения качения, которая направлена так, что ее момент уменьшает угловую скорость  $\omega$ , а сама сила вызывает соответствующее (опять-таки такое, чтобы не возникало скольжения) замедление центра инерции. Сила трения качения совершает над катящимся телом отрицательную работу.

При решении задачи о скатывании цилиндра с наклонной плоскости трением качения мы пренебрегали.

2-й способ решения. Поскольку сила трения работы не совершает (трением качения пренебрегаем), полная энергия цилиндра остается постоянной. В начальный момент кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия равна  $mgh$ . В конце скатывания потенциальная энергия становится равной нулю, зато появляется кинетическая энергия, равная [см. (40.9)]

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}.$$

Так как скольжение отсутствует,  $v_C$  и  $\omega$  связаны соотношением  $v_C = \omega R$ . Подставив в выражение для кинетической энергии  $\omega = \frac{v_C}{R}$  и  $I_C = \frac{1}{2} mR^2$ , получим:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3}{4} mv_C^2.$$

Полная энергия в начале и в конце скатывания должна быть одинакова:

$$\frac{3}{4} mv_C^2 = mgh,$$

откуда

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3} gh},$$

а угловая скорость

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

**Пример 3.** Тело массы  $m$  подвергается в течение очень короткого промежутка времени  $\Delta t$  действию постоянной силы  $\mathbf{f}$ . Все остальное время, кроме промежутка  $\Delta t$ , на него не воздействуют никакие тела. До сообщения телу импульса  $\mathbf{f} \Delta t$  оно покоится. Определить, как будет двигаться тело после того, как прекратится действие силы.

Уравнение (41.1) в данном случае имеет вид

$$m \mathbf{w}_C = \mathbf{f},$$

откуда

$$\mathbf{w}_C = \frac{1}{m} \mathbf{f}. \quad (41.13)$$

Следовательно, пока действует сила, центр инерции тела будет двигаться равномерно-ускоренно в направлении действия силы.

Обозначим плечо силы  $\mathbf{f}$  относительно центра инерции буквы  $l$  (рис. 112). Проведем через центр инерции  $C$  ось  $OO$  таким образом, чтобы она была перпендикулярна к плоскости, проходящей через линию, вдоль которой действует сила, и через центр инерции тела. Уравнение (41.2) относительно этой оси имеет вид

$$I_C \beta = M,$$

где  $I_C$  — момент инерции тела относительно оси  $OO$ , а  $M = fl$  — момент силы  $\mathbf{f}$  относительно той же оси. Решая это уравнение относительно  $\beta$ , находим:

$$\beta = \frac{M}{I_C} = \frac{fl}{I_C}. \quad (41.14)$$

Таким образом, все время  $\Delta t$ , пока действует сила, тело ведет себя так, что его центр инерции движется прямолинейно в направлении действия силы с постоянным ускорением (41.13) и одновременно происходит вращение тела вокруг оси, проходящей через центр инерции, с постоянным угловым ускорением (41.14). К концу промежутка времени  $\Delta t$  скорость центра инерции достигает значения

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{w}_C \Delta t = \frac{\mathbf{f} \Delta t}{m},$$

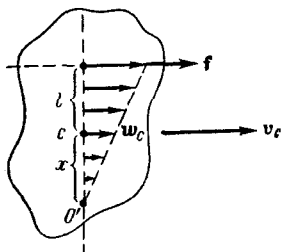


Рис. 112.

а угловая скорость станет равной

$$\omega = \beta \Delta t = \frac{M \Delta t}{I_C} = \frac{fl \Delta t}{I_C}.$$

Найденные нами значения  $v_C$  и  $\omega$  определяют движение тела после того, как прекратится действие силы.

Отметим, что полученный результат справедлив только в том случае, если за время действия силы тело повернется на небольшой угол, так что плечо силы  $l$  в течение всего промежутка времени  $\Delta t$  можно с достаточной степенью точности считать постоянным.

Легко видеть, что скорость точки  $O'$ , лежащей от центра инерции  $C$  на расстоянии  $x$ , определяемом условием

$$\omega x = v_C, \quad \text{т. е.} \quad \beta x = \omega_C, \quad (41.15)$$

будет равна нулю (рис. 112). Следовательно, ось, проходящая через точку  $O'$ , является мгновенной осью вращения. Подставив в (41.15) найденные нами выражения для  $\omega_C$  и  $\beta$ , найдем, что

$$x = \frac{I_C}{ml}.$$

В результате действия силы тело приобретает кинетическую энергию

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{f \Delta t}{m} \right)^2 + \frac{I_C}{2} \left( \frac{fl \Delta t}{I_C} \right)^2 = \frac{I_C + ml^2}{2ml_C} (f \Delta t)^2.$$

Зависимость  $T$  от  $l$  объясняется тем, что путь, проходимый точкой приложения силы за время  $\Delta t$ , растет с увеличением  $l$ , а следовательно, растет и работа, совершаемая силой над телом.

## § 42. Свободные оси. Главные оси инерции

Если какое-либо тело привести во вращение вокруг произвольной оси и затем предоставить самому себе, то положение оси вращения в пространстве, вообще говоря, изменяется: ось либо поворачивается, либо перемещается относительно инерциальной системы отсчета. Для того чтобы произвольно взятую ось вращения тела удерживать в неизменном положении, к ней необходимо приложить определенные силы,



Например, если тело имеет такую форму, как на рис. 113, и вращается вокруг оси  $OO$  с угловой скоростью  $\omega$ , то, чтобы удерживать ось вращения неподвижной, необходимо приложить к ней силы, обеспечивающие вращательный момент  $M = m\omega^2 rl$ . В самом деле, чтобы осуществить движение масс  $m$  по окружностям радиуса  $r$ , к ним должны быть приложены силы  $f'_1$  и  $f'_2$ , каждая из которых равна  $m\omega^2 r$ . Эти силы образуют пару с моментом  $M = m\omega^2 rl$ . Если не создать этого момента, поместив, например, ось в подшипники, которые действуют на ось с соответствующими силами  $f_1$  и  $f_2$ <sup>1)</sup>, то ось вращения будет поворачиваться в направлении, указанном стрелкой.

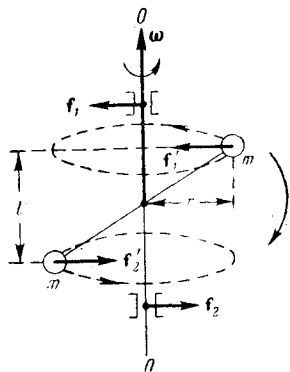


Рис. 113.

Если стержень, связывающий массы  $m$ , перпендикулярен к оси вращения  $OO$  и массы находятся на различных расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси (рис. 114), то для предотвращения перемещения оси в пространстве подшипники должны действовать на ось с одинаково направленными силами  $f_1$  и  $f_2$ , сумма модулей которых равна разности модулей центробежных сил  $f'_1$  и  $f'_2$ :

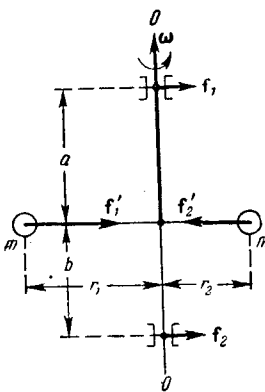


Рис. 114.

$$f_1 + f_2 = m\omega^2 (r_1 - r_2)$$

(при равенстве отрезков  $a$  и  $b$  силы  $f_1$  и  $f_2$  будут одинаковы по величине; в противном случае должно выполняться условие:  $f_1 a = f_2 b$ ).

Ось вращения, положение которой в пространстве сохраняется без действия на нее каких-либо сил извне, называется свободной осью тела. В случае,

<sup>1)</sup> Направления этих сил будут изменяться с поворотом тела вокруг оси.

изображенном на рис. 114, при  $r_1 = r_2$  ось  $OO$  будет, очевидно, свободной осью.

Можно доказать, что для любого тела существуют три взаимно-перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела оси, которые могут служить свободными осями; они называются главными осями инерции тела.

У однородного параллелепипеда (рис. 115) главными осями инерции будут, очевидно, оси  $O_1O_1$ ,  $O_2O_2$  и  $O_3O_3$ , проходящие через центры противоположных граней.

У тела, обладающего осевой симметрией (например, у одно-

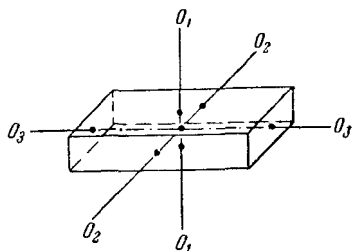


Рис. 115.

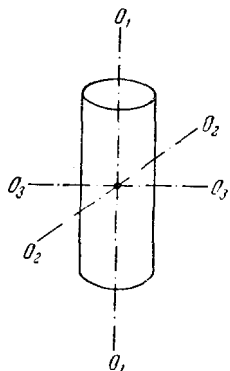


Рис. 116.

родного<sup>1)</sup> цилиндра), одной из главных осей инерции является ось симметрии, в качестве двух других осей могут служить две любые взаимно-перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии и проходящие через центр инерции тела (рис. 116). Таким образом, у тела с осевой симметрией фиксирована только одна из главных осей инерции.

У тела с центральной симметрией, т. е. у шара, плотность которого зависит только от расстояния от центра, главными осями инерции являются три любые взаимно-перпендикулярные оси, проходящие через центр инерции. Следовательно, ни одна из главных осей инерции не фиксирована.

Моменты инерции тела относительно главных осей в общем случае различны:  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Для тела с осевой симметрией два момента инерции имеют одинаковую

<sup>1)</sup> Достаточно, чтобы плотность тела была в каждом сечении функцией только расстояния от оси симметрии.

величину, третий же, вообще говоря, отличен от них:  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . И, наконец, в случае тела с центральной симметрией все три момента будут одинаковы:  $I_1 = I_2 = I_3$ .

Если тело вращается в условиях, когда какое-либо воздействие извне отсутствует, то устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих максимальному и минимальному значениям момента инерции. Вращение же вокруг оси, соответствующей промежуточному по величине моменту, будет

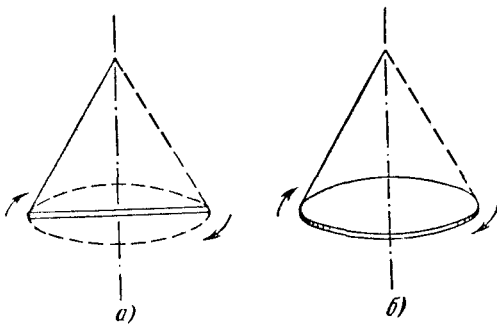


Рис. 117.

неустойчивым. Это означает, что силы, возникающие при малейшем отклонении оси вращения от этой главной оси, действуют в таком направлении, что величина этого отклонения возрастает. При отклонении вращения от устойчивой оси под действием возникающих при этом сил тело возвращается к вращению вокруг соответствующей главной оси.

В сказанном можно убедиться, попытавшись подбросить какое-либо тело, имеющее форму параллелепипеда (например, коробок спичек), приведя его одновременно во вращение<sup>1)</sup>. При этом обнаружится, что тело, падая, может вращаться устойчиво вокруг осей, проходящих через наибольшие или наименьшие грани. Попытки же подбросить тело так, чтобы оно вращалось вокруг оси, проходящей через средние грани, будут безуспешными.

<sup>1)</sup> Воздействие силы тяжести в этом случае не является существенным. Оно лишь обуславливает происходящее наряду с вращением падение тела.

При наличии внешнего воздействия, например, со стороны нити, за которую подвешено вращающееся тело, устойчивым оказывается только вращение вокруг главной оси, соответствующей наибольшему значению момента инерции. По этой причине тонкий стержень, подвешенный на нити, прикрепленной к его концу, при быстром вращении будет в конечном итоге вращаться вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр (рис. 117, а). Аналогичным образом ведет себя диск, подвешенный на прикрепленной к его краю нити (рис. 117, б).

### § 43. Момент импульса твердого тела

Найденное нами в § 38 выражение для момента импульса твердого тела

$$\mathbf{L}_z = I_z \boldsymbol{\omega} \quad (43.1)$$

справедливо только в том случае, когда тело вращается вокруг неподвижной оси, т. е. вокруг оси, удерживаемой в пространстве подшипниками, или вокруг свободной оси. В иных случаях связь между  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  значительно усложняется, в частности, вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  не совпадает по направлению с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ .

Направим оси координат<sup>1)</sup> по главным осям инерции тела. Пусть вектор  $\boldsymbol{\omega}$  не совпадает ни с одной из этих осей (рис. 118). Тогда все его составляющие по осям —  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,

$\omega_z$  — будут, вообще говоря, отличны от нуля. Произведение  $I_z \omega_z$  дает согласно (43.1) составляющую вектора  $\mathbf{L}$  по оси  $z$ . Аналогично  $I_x \omega_x$  дает составляющую  $\mathbf{L}_x$ , а  $I_y \omega_y$  — составляющую  $\mathbf{L}_y$ . Если моменты инерции относительно главных осей  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  не равны между собой, то результирующий вектор  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_z$ , как видно из рис. 118, не совпадает по направлению с век-

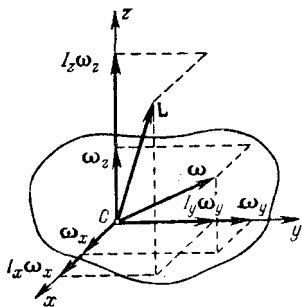


Рис. 118.

<sup>1)</sup> Имеются в виду оси, жестко связанные с телом и вращающиеся вместе с ним.

тором  $\omega$ . Только при условии, что  $\omega$  направлена по одной из главных осей, скажем по оси  $z$ , составляющие  $\omega$  по остальным осям (т. е.  $\omega_x$  и  $\omega_y$ ) будут равны нулю, в результате и составляющие  $L_x$  и  $L_y$  будут нулями, и мы приходим к формуле (43.1).

Таким образом, если в качестве координатных осей выбрать главные оси инерции тела, то связь между векторами  $\omega$  и  $L$  имеет вид:

$$L = I_x \omega_x + I_y \omega_y + I_z \omega_z. \quad (43.2)$$

Вспомнив, что  $\omega_x = \omega_x \mathbf{i}$  и т. д., последнему выражению можно придать вид:

$$L = (I_x \omega_x) \mathbf{i} + (I_y \omega_y) \mathbf{j} + (I_z \omega_z) \mathbf{k},$$

откуда следует, что связь между проекциями на координатные оси векторов  $L$  и  $\omega$  дается соотношениями:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (43.3)$$

Еще сложнее оказывается эта связь, когда координатные оси не совпадают с главными осями инерции тела. В этом случае соотношения между проекциями  $L$  и  $\omega$  выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (43.4)$$

Девять величин  $I_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) образуют так называемый симметричный<sup>1)</sup> тензор второго ранга, называемый тензором инерции. Компоненты тензора  $I_{ik}$  зависят от выбора координатных осей. Если оси координат совпадают с главными осями инерции тела, все компоненты, кроме  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  и  $I_{zz}$ , обращаются в нуль и формулы (43.4) переходят в (43.3) [в (43.3)  $I_{xx}$  обозначен через  $I_x$  и т. д.].

Заметим, что уравнение (37.11), полученное нами для системы материальных точек, справедливо и для твердого тела. Под  $L$  в этом случае следует подразумевать вектор с проекциями на координатные оси, определяемыми формулами (43.4).

<sup>1)</sup> Тензор называется симметричным, если его компоненты удовлетворяют условию  $I_{ik} = I_{ki}$ .

В заключение разберем случай вращения тела вокруг неподвижной оси  $z$ , не совпадающей ни с одной из главных осей инерции. Такая ось может быть неподвижной только при действии на нее внешних сил (см., например, рис. 113). Момент этих сил относительно оси  $z$  равен, очевидно, нулю (направления, вдоль которых действуют силы, проходит через ось), однако момент сил относительно произвольной точки  $O$ , лежащей на этой оси, отличен от нуля. По этой причине момент импульса  $L_z$  тела относительно оси  $z$  остается неизменным ( $\frac{d}{dt} L_z = M_z$ , а  $M_z = 0$ ), момент же импульса  $L$  относительно точки  $O$ , который в этом случае не совпадает по направлению с вектором  $\omega$  (направленным по оси  $z$ ), поворачивается вместе с телом в пространстве под действием перпендикулярного к нему момента внешних сил  $M$  ( $\frac{d}{dt} L = M \neq 0$ ).

#### § 44. Гироскопы

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Ось симметрии является одной из главных осей инерции гироскопа, поэтому момент импульса гироскопа совпадает по направлению с его осью вращения. Для того чтобы изменить направление в пространстве оси гироскопа, необходимо в соответствии с (37.11) подействовать на него моментом внешних сил. При этом наблюдается следующее явление, получившее название гироскопического эффекта: под действием сил, которые, казалось бы, должны были вызвать поворот оси гироскопа  $OO$  вокруг прямой  $O'O'$  (рис. 119), ось гироскопа поворачивается вокруг прямой  $O''O''$  (ось  $OO$  и прямая  $O'O'$  предполагаются лежащими в плоско-

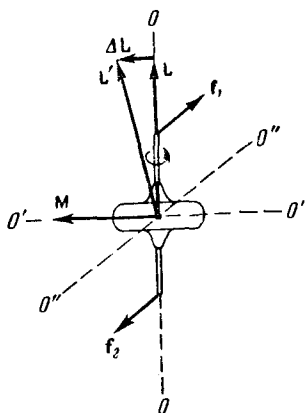


Рис. 119.

сти чертежа, а прямая  $O''O''$  и силы  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  — перпендикулярными к этой плоскости).

«Противоестественное» на первый взгляд поведение гироскопа оказывается, как легко видеть, полностью соответствующим законам динамики вращательного движения, т. е. в конечном счете, законам Ньютона. В самом деле, момент сил  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  направлен вдоль прямой  $O'O'$ . За время  $\Delta t$  момент импульса гироскопа  $\mathbf{L}$  получит приращение  $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{M}\Delta t$ , которое имеет такое же направление, как и  $\mathbf{M}$ . Момент импульса гироскопа спустя время  $\Delta t$  будет равен результирующей  $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$ , лежащей в плоскости чертежа. Направление вектора  $\mathbf{L}'$  совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой  $O''O''$ , причем так, что угол между векторами  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  уменьшается. Если действовать на гироскоп длительное время постоянным по направлению моментом внешних сил  $\mathbf{M}$ , то ось гироскопа устанавливается в конце концов так, что ось и направление собственного вращения совпадают с осью и направлением вращения под действием внешних сил (вектор  $\mathbf{L}$  совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{M}$ ).

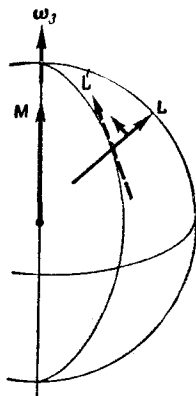


Рис. 120.

Описанное поведение гироскопа положено в основу прибора, называемого гироскопическим компасом (гироскопом). Этот прибор представляет собой гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости (рис. 120). Вследствие суточного вращения Земли гироскопический компас оказывается под действием сил, которые стремятся вовлечь его во вращение вокруг земной оси (подобно тому как силы  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  на рис. 119 стремятся вовлечь гироскоп во вращение вокруг прямой  $O'O'$ ). В результате ось гироскопа поворачивается так, чтобы угол между вектором момента импульса гироскопа  $\mathbf{L}$  и вектором угловой скорости Земли  $\omega_3$  уменьшался. Это продолжается до тех пор, пока угол между  $\mathbf{L}$  и  $\omega_3$  не станет минимальным, т. е. пока ось гироскопа не установится в меридиональной

плоскости (в отличие от рассмотренного выше общего случая поворот оси гироскопического компаса ограничен так, что эта ось может располагаться только в горизонтальной плоскости).

Гироскопический компас выгодно отличается от компаса с магнитной стрелкой тем, что в его показаниях нет необходимости вносить поправки на так называемое магнитное склонение<sup>1)</sup>, а также не приходится принимать мер для компенсации воздействия на стрелку расположенных вблизи от нее ферромагнитных предметов (например, стального корпуса корабля и т. п.). По этой причине в навигации в настоящее время применяются преимущественно гироскопы.

**Гироскопические силы.** При попытках вызвать поворот оси гироскопа заданным образом вследствие гироскопического эффекта возникают гироскопические силы,

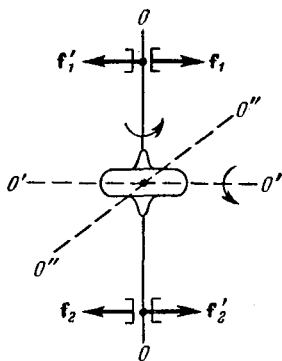


Рис. 121.

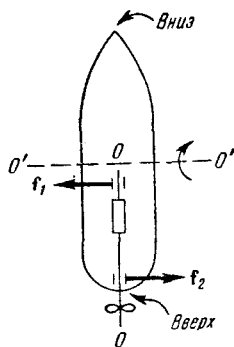


Рис. 122.

действующие на опоры, в которых вращается ось гироскопа. Например, при принудительном повороте оси гироскопа  $OO'$  вокруг прямой  $O'O'$  (рис. 121) ось  $OO'$  стремится повернуться вокруг прямой  $O''O'''$ . Чтобы предотвратить это вращение, к оси гироскопа должны быть приложены действующие со стороны подшипников силы  $f_1'$  и  $f_2'$ . По третьему закону Ньютона ось будет действо-

<sup>1)</sup> Магнитным склонением называется угол между магнитным и географическим меридианами.



вать на подшипники с силами  $f_1$  и  $f_2$ , которые и являются гироскопическими силами.

С наличием гироскопических сил приходится считаться, например, при конструировании подшипников паровых турбин на кораблях. Ротор турбины представляет собой гироскоп. При килевой (продольной) качке судна происходит принудительный поворот оси турбины вокруг прямой  $O'O'$  (рис. 122).

Это приводит к возникновению гироскопических сил  $f_1$  и  $f_2$ , обуславливающих дополнительное, подчас значительное, давление оси на подшипники.

### Прецессия гироскопа.

Особый вид движения гироскопа имеет место в том случае, если момент действующих на гироскоп внешних сил, оставаясь постоянным по величине, поворачивается одновременно с осью гироскопа, образуя с ней все время прямой угол. В таких условиях находится, например, гироскоп с осью, вращающейся на шарнире, находящийся в поле сил тяжести (рис. 123).

Момент внешних сил, приложенных к гироскопу, равен по величине:

$$M = mgl \sin \alpha, \quad (44.1)$$

где  $m$  — масса гироскопа,  $l$  — расстояние от шарнира до центра инерции гироскопа,  $\alpha$  — угол, образованный осью гироскопа с вертикалью. Направлен момент  $M$  перпендикулярно к вертикальной плоскости, проходящей через ось гироскопа (на рис. 123 эта плоскость заштрихована).

Под действием момента сил  $M$  момент импульса  $L$  гироскопа получает за время  $dt$  приращение

$$dL = M dt, \quad (44.2)$$

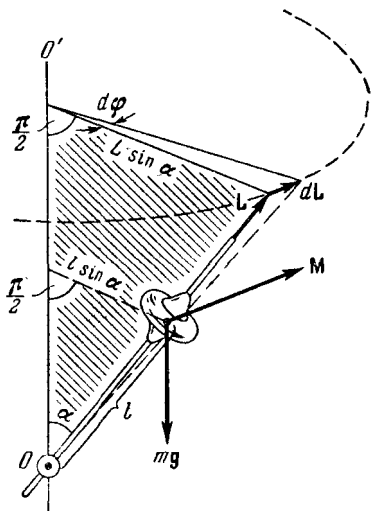


Рис. 123.

совпадающее по направлению с вектором  $\mathbf{M}$ , т. е. перпендикулярное к вектору  $\mathbf{L}$ . Изменение, которое претерпевает вектор  $\mathbf{L}$ , получив приращение  $d\mathbf{L}$ , соответствует такому повороту оси гироскопа вокруг вертикальной прямой  $OO'$ , при котором угол  $\alpha$  не изменяется. Вертикальная плоскость, проходящая через ось гироскопа, повернется при этом на угол  $d\varphi$ . Одновременно на такой же угол повернется в горизонтальной плоскости вектор  $\mathbf{M}$ . В результате спустя время  $dt$  будет иметь место такое же взаимное расположение векторов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$ , как и в начальный момент.

За последующий элемент времени  $dt$  вектор  $\mathbf{L}$  получит снова приращение  $d\mathbf{L}$ , которое будет перпендикулярно к новому (возникшему после «первого» элементарного поворота) значению вектора  $\mathbf{L}$ , и т. д. В итоге ось гироскопа будет непрерывно поворачиваться вокруг вертикали, проходящей через шарнир  $O$ , описывая конус с углом раствора, равным  $2\alpha$ . Вектор  $\mathbf{L}$  при этом будет изменяться только по направлению, по величине он будет постоянным, так как элементарные приращения  $d\mathbf{L}$  все время будут перпендикулярны к вектору  $\mathbf{L}$ .

Описанное движение гироскопа называется прецессией и представляет собой движение оси гироскопа под действием внешних сил, происходящее таким образом, что ось описывает конус (в частности, при  $\alpha = \pi/2$  конус вырождается в плоскость).

Вектор  $\mathbf{L}$  при прецессии ведет себя подобно вектору скорости при равномерном движении по окружности. В последнем случае элементарное приращение скорости  $d\mathbf{v}$  все время перпендикулярно к вектору  $\mathbf{v}$  и равно  $w dt$ , где  $|w|$  постоянен. В случае гироскопа  $d\mathbf{L}$  перпендикулярно к вектору  $\mathbf{L}$  и равно  $\mathbf{M} dt$ , где  $|\mathbf{M}|$  постоянен.

Угловая скорость вращения плоскости, проходящей через ось конуса и ось гироскопа, называется скоростью прецессии. Угловая скорость прецессии, очевидно, равна

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt},$$

где  $d\varphi$  — угол, на который повернется указанная плоскость за время  $dt$ . Этот угол может быть представлен как отношение  $|d\mathbf{L}|$  к  $L \sin \alpha$  (см. рис. 123, начало вектора  $\mathbf{L}$  предполагается совмещенным с шарниром  $O$ ):

$$d\varphi = \frac{|d\mathbf{L}|}{L \sin \alpha}. \quad (44.3)$$

В соответствии с (44.2) и (44.1)

$$|d\mathbf{L}| = M dt = mgl \sin \alpha dt.$$

Подставляя в (44.3) это выражение и заменяя  $L$  через  $I\omega$ , получим:

$$d\varphi = \frac{mgl \sin \alpha dt}{I\omega \sin \alpha} = \frac{mgl}{I\omega} dt.$$

Отсюда угловая скорость прецессии

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (44.4)$$

Из (44.4) следует, что скорость прецессии не зависит от угла наклона оси гироскопа по отношению к горизонту.

Поскольку момент импульса  $I\omega$  обычно велик, скорость прецессии  $\omega'$  бывает мала, причем  $\omega'$  тем меньше, чем больше  $\omega$ . С уменьшением угловой скорости вращения гироскопа  $\omega$  скорость прецессии  $\omega'$  возрастает.

Следует иметь в виду, что в случае прецессии момент импульса гироскопа не совпадает с его осью симметрии, так как движение гироскопа представляет собой сумму двух вращений — вращения вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$  и вращения вокруг вертикальной оси с угловой скоростью прецессии  $\omega'$ . Результирующая угловая скорость будет равна  $\omega + \omega'$  (рис. 124). Однако, поскольку  $\omega' \ll \omega$ , можно приближенно считать, что  $\omega + \omega' \approx \omega$  и  $\mathbf{L} = I\omega$ . При выводе формулы (44.4) для угловой скорости прецессии мы пользовались этим приближением.

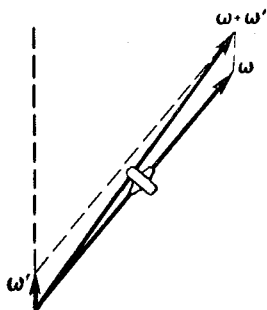


Рис. 124.

## § 45. Деформации твердого тела

Как уже отмечалось, под действием сил происходит деформация тел, т. е. изменение их размеров и формы. Если после прекращения действия сил, вызвавших деформацию, тело принимает первоначальные размеры и

форму, деформация называется упругой. Мы ограничимся кратким рассмотрением основных упругих деформаций.

Упругие деформации происходят в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый, определенный для каждого конкретного тела предел. При превышении этого предела тело получает остаточные или пластические деформации, сохраняющиеся и после прекращения действия силы на тело.

Все возможные виды упругих деформаций твердого тела могут быть сведены к двум основным: растяжению (или сжатию) и сдвигу.

**Продольное растяжение (или одностороннее сжатие).** Если к концам однородного стержня постоянного сечения приложить направленные вдоль его оси силы

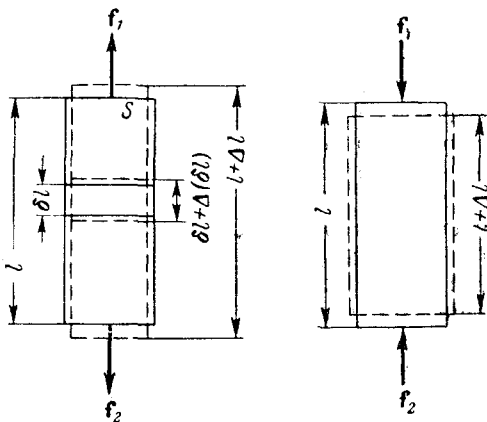


Рис. 125.

$f_1$  и  $f_2$  ( $f_1 = f_2 = f$ ), действие которых равномерно распределено по всему сечению, то длина стержня  $l$  получит положительное (при растяжении), либо отрицательное (при сжатии) приращение  $\Delta l$  (рис. 125). При этом каждый произвольно выбранный элемент стержня  $\delta l$  получает приращение  $\Delta(\delta l)$ , пропорциональное его длине, так что для всех элементов стержня отношение  $\frac{\Delta(\delta l)}{\delta l}$  оказывается одним и тем же. Естественно поэтому в ка-

честве величины, характеризующей деформацию стержня, взять относительное изменение его длины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (45.1)$$

Как следует из его определения, относительное удлинение  $\varepsilon$  является безразмерной величиной. В случае растяжения оно положительно, а в случае сжатия — отрицательно.

Опыт дает, что для стержней из данного материала относительное удлинение при упругой деформации пропорционально силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня:

$$\varepsilon = \alpha \frac{f}{S}. \quad (45.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  называется коэффициентом упругости. Он зависит только от свойств материала стержня.

Величина, равная отношению силы к величине поверхности, на которую сила действует, называется **напряжением**. Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом напряжение передается во все точки тела — весь объем стержня оказывается в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется **нормальным**. Если сила направлена по касательной к поверхности, на которую она действует, напряжение называется **тангенциальным**. Нормальное напряжение принято обозначать буквой  $\sigma$ , тангенциальное — буквой  $\tau$ .

Введя в рассмотрение нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{f}{S}, \quad (45.3)$$

уравнение (45.1) можно записать следующим образом:

$$\varepsilon = \alpha \sigma. \quad (45.4)$$

Таким образом, относительное удлинение оказывается пропорциональным нормальному напряжению. Из (45.4) вытекает, что коэффициент упругости  $\alpha$  численно равен относительному удлинению при напряжении, равном единице.

Наряду с коэффициентом упругости  $\alpha$  для характеристики упругих свойств материала пользуются обратной ему величиной  $E = 1/\alpha$ , которая называется модулем Юнга.

Заменяя в (45.4)  $\alpha$  через  $E$ , получим:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (45.5)$$

откуда следует, что модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение было бы равно единице (т. е. приращение длины  $\Delta l$  было бы равно первоначальной длине  $l$ ), если бы столь большие упругие деформации были возможны (на самом деле, при значительно меньших напряжениях происходит разрыв стержня, еще раньше достигается предел упругости).

С учетом (45.1) и (45.5) соотношение (45.3) может быть приведено к следующему виду:

$$f = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l, \quad (45.6)$$

где  $k$  — постоянный для данного стержня коэффициент.

Согласно (45.6) удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе. Соотношение (45.6) выражает закон Гука для данной деформации. Этот закон выполняется только до тех пор, пока не достигается предел упругости.

Изменение длины стержня при деформации сопровождается соответствующим изменением поперечных размеров стержня  $d$  (рис. 125). Это изменение принято характеризовать относительным поперечным расширением или сжатием:

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d}. \quad (45.7)$$

Очевидно, что  $\epsilon$  и  $\epsilon'$  всегда имеют разные знаки: при растяжении  $\Delta l$  положительно, а  $\Delta d$  отрицательно, при сжатии  $\Delta l$  отрицательно, а  $\Delta d$  положительно. Опыт дает, что  $\epsilon'$  пропорционально  $\epsilon$ :

$$\epsilon' = -\mu\epsilon, \quad (45.8)$$

где  $\mu$  — положительный коэффициент, зависящий только от свойств материала. Его называют коэффициентом поперечного сжатия или коэффициентом Пуассона.

Сдвиг. Возьмем однородное тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, и приложим к его противоположащим граням силы  $f_1$  и  $f_2$  ( $f_1 = f_2 = f$ ), направленные параллельно этим граням (рис. 126). Если действие сил будет равномерно распределено по всей поверхности соответствующей грани  $S$ , то в любом сечении, параллельном этим граням, возникнет тангенциальное напряжение

$$\tau = \frac{f}{S}. \quad (45.9)$$

Под действием напряжений тело деформируется таким образом, что верхняя (на рисунке) грань сместится относительно нижней на некоторое расстояние  $a$ . Если тело мысленно разбить на элементарные горизонтальные слои, то каждый слой окажется сдвинутым относительно соседних с ним слоев. По этой причине деформация такого вида получила название сдвига.

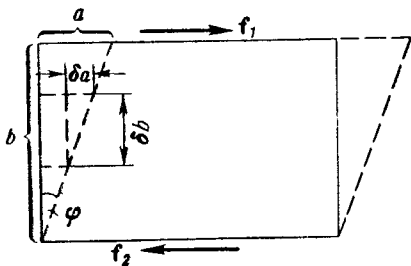


Рис. 126.

При деформации сдвига любая прямая, первоначально перпендикулярная к горизонтальным слоям, повернется на некоторый угол  $\varphi$ . Следовательно, отношение сдвига  $da$  двух произвольно взятых слоев к расстоянию между этими слоями  $db$  будет одинаково для любой пары слоев. Это отношение естественно взять в качестве характеристики деформации сдвига:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (45.10)$$

Величина  $\gamma$  называется относительным сдвигом. В силу малости угла  $\varphi$  можно положить  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ . Следовательно, относительный сдвиг  $\gamma$  оказывается равным углу сдвига  $\varphi$ . Опыт показывает, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau. \quad (45.11)$$

Коэффициент  $G$  зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Он равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равным  $45^\circ$  ( $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ), если бы при столь больших деформациях не был превзойден предел упругости.

Кроме разобранных нами основных деформаций, рассмотрим кручение круглого стержня. Если круглый стержень закрепить одним концом неподвижно,

а к другому концу приложить вращательный момент  $M$ , имеющий направление вдоль оси стержня (рис. 127), то стержень получит такую деформацию, при которой его нижнее основание повернется по отношению к верхнему на некоторый угол  $\varphi$ .

Легко видеть, что деформация при кручении представляет собой деформацию сдвига. Действительно, если мысленно разбить стержень на элементарные слои, перпендикулярные к его оси, то закручивание приведет к сдвигу каждого из таких слоев по отношению к соседним с ним слоям. Правда, сдвиг этот будет неоднороден: участок слоя  $\Delta S$  получает по отношению к аналогичному участку смежного слоя тем большее смещение,

чем дальше он отстоит от оси стержня.

Произведя соответствующий расчет, можно показать, в согласии с опытом, что угол закручивания стержня определяется следующим выражением:

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} M, \quad (45.12)$$

где  $l$  — длина стержня,  $r$  — его радиус,  $G$  — модуль сдвига,  $M$  — вращательный момент.

Обозначая постоянный для данного стержня множитель при  $M$  буквой  $k$ , соотношению (45.12) можно придать вид

$$\varphi = kM. \quad (45.13)$$

Последнее соотношение выражает закон Гука при кручении. При постоянной длине стержня из данного мате-

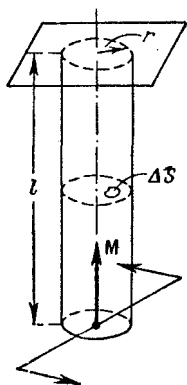


Рис. 127.



риала коэффициент пропорциональности  $k$  очень сильно зависит от толщины стержня (как  $1/r^4$ ).

**Энергия упругой деформации.** Упруго деформированное тело, например, растянутый или сжатый стержень, возвращаясь в недеформированное состояние, может, подобно сжатой или растянутой пружине, совершить работу над внешними телами, т. е. обладает некоторым запасом энергии<sup>1</sup>). Поскольку эта энергия обусловлена взаимным расположением элементов тела, она представляет собой потенциальную энергию. Запас энергии деформированного тела равен, очевидно, работе, которая совершается внешними силами при деформации.

Вычислим энергию упруго растянутого (сжатого) стержня. При растяжении на стержень необходимо действовать силой, величина которой определяется выражением (45.6). Работа этой силы равна

$$A = \int_0^{\Delta l} f dx,$$

где буквой  $x$  обозначено абсолютное удлинение стержня, которое в процессе деформации изменяется от 0 до  $\Delta l$ .

Сила  $f$ , соответствующая удлинению  $x$ , согласно (45.6) равна

$$f = kx = \frac{ES}{l} x.$$

Следовательно,

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = U^2).$$

Умножая числитель и знаменатель полученного выражения на  $l$ , заменяя затем отношение  $\Delta l/l$  относительным удлинением  $\epsilon$  и учитывая, наконец, что  $Sl$  дает объем стержня  $V$ , получим:

$$U = \frac{E\epsilon^2}{2} V. \quad (45.14)$$

<sup>1</sup>) См. (27.13) и соответствующий текст.

<sup>2</sup>) Приравняв найденную работу потенциальной энергии, мы положили энергию недеформированного тела равной нулю.

Введем в рассмотрение плотность энергии  $u$ , которую определим как отношение энергии  $\Delta U$  к тому объему  $\Delta V$ , в котором она заключена:

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V}.$$

Поскольку в нашем случае стержень однороден и деформация является равномерной, т. е. одинаковой в разных точках стержня, энергия (45.14) распределена в стержне также равномерно с постоянной плотностью. Поэтому можно считать:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{E\epsilon^2}{2}. \quad (45.15)$$

Выражение (45.15) дает плотность энергии упругой деформации при растяжении (или при сжатии). Аналогичным образом можно получить, что плотность энергии упругой деформации при сдвиге равна

$$u = \frac{G\gamma^2}{2}. \quad (45.16)$$

## ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

## § 46. Закон всемирного тяготения

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен Ньютоном и носит название закона всемирного тяготения. Согласно этому закону сила, с которой два тела притягивают друг друга, пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (46.1)$$

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной. Направлена сила

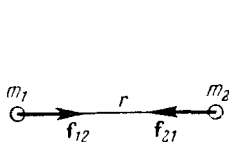


Рис. 128.

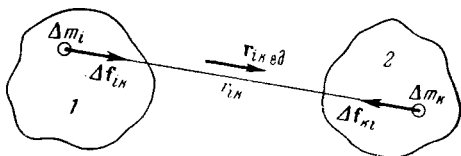


Рис. 129.

вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела (рис. 128). Формула (46.1) дает численное значение равных по величине сил  $f_{12}$  и  $f_{21}$ .

Тела, о которых идет речь в соотношении (46.1), представляют собой, очевидно, материальные точки. Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, их нужно разбить на элементарные массы  $\Delta m$ , т. е. небольшие

объемы, каждый из которых можно было бы принять за материальную точку (рис. 129). Согласно (46.1)  $i$ -я элементарная масса тела 1 притягивается к  $k$ -й элементарной массе тела 2 с силой

$$\Delta \mathbf{f}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik \text{ ед}}, \quad (46.2)$$

где  $\mathbf{r}_{ik \text{ ед}}$  — единичный вектор, имеющий направление от  $\Delta m_i$  к  $\Delta m_k$ , а  $r_{ik}$  — расстояние между этими элементарными массами.

Просуммировав (46.2) по всем значениям  $k$ , получим результирующую всех сил, действующих со стороны тела 2 на принадлежащую телу 1 элементарную массу  $\Delta m_i$ :

$$\Delta \mathbf{f}_{i2} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik \text{ ед}}. \quad (46.3)$$

Наконец, просуммировав (46.3) по всем значениям индекса  $i$ , т. е. сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим силу, с которой тело 2 действует на тело 1:

$$\mathbf{f}_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik \text{ ед}}. \quad (46.4)$$

Суммирование производится по всем значениям индексов  $i$  и  $k$ . Следовательно, если тело 1 разбить на  $N_1$ , а тело 2 — на  $N_2$  элементарных масс, то сумма (46.4) будет содержать  $N_1 N_2$  слагаемых.

По третьему закону Ньютона тело 1 действует на тело 2 с силой  $\mathbf{f}_{21}$ , которая равна  $-\mathbf{f}_{12}$ .

Практически суммирование (46.4) сводится к интегрированию и является, вообще говоря, очень сложной математической задачей. Если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары<sup>1)</sup>, то вычисление согласно (46.4) приводит к следующему результату:

$$\mathbf{f}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_{12 \text{ ед}}, \quad (46.5)$$

<sup>1)</sup> Достаточно, чтобы распределение массы в пределах каждого шара обладало центральной симметрией, т. е. чтобы плотность была функцией только расстояния от центра шара.

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы шаров,  $r$  — расстояние между их центрами,  $\mathbf{r}_{12\text{ед}}$  — единичный вектор, имеющий направление от центра первого шара к центру второго. Таким образом, шары взаимодействуют, как материальные точки, имеющие массы, равные массам шаров, и помещенные в их центрах.

Если одно из тел представляет собой шар очень большого радиуса  $R$  (например, земной шар), а второе тело, не будучи шаром, имеет размеры, гораздо меньшие  $R$ , и находится вблизи поверхности шара, то их взаимодействие описывается формулой (46.5), где вместо  $r$  нужно взять радиус шара (расстоянием от второго тела до поверхности шара, а также размерами второго тела можно пренебречь по сравнению с  $R$ ).

С коэффициентом пропорциональности  $\gamma$  в уравнении (46.1) нецелесообразно поступать так, как мы поступили с коэффициентом пропорциональности в уравнении второго закона Ньютона (т. е. делать его равным единице за счет выбора единицы измерения силы), поскольку в этом случае пришлось бы при рассмотрении различных физических явлений пользоваться разными единицами измерения одной и той же величины — силы. Если же пользоваться для измерения величин, входящих в (46.1), ранее установленными единицами, то гравитационная постоянная  $\gamma$  оказывается размерной величиной, численное значение которой должно быть установлено опытным путем. Размерность  $\gamma$  в соответствии с (46.1) равна

$$[\gamma] = \frac{[f] [r^2]}{[m^2]} = \frac{\frac{ML}{T^2} L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

Численное значение  $\gamma$  было определено путем измерения силы, с которой притягиваются друг к другу тела известной массы. При таких измерениях возникают большие трудности, так как для тел, массы которых могут быть непосредственно измерены, сила притяжения оказывается крайне малой. Так, например, два тела с массой 100 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют с силой порядка  $10^{-6}$  н, т. е. порядка  $10^{-4}$  Г.

Первой успешной попыткой определения  $\gamma$  были измерения, осуществленные Кавендишем (1798 г.) который применил для измерения сил весьма чувствительный

метод крутильных весов (рис. 130). Два свинцовых шара  $m$  (с массой 729 г каждый), прикрепленных к концам легкого коромысла, помещались вблизи симметрично расположенных шаров  $M$  (с массой по 158 кг). Коромысло подвешивалось на упругой нити, по закручиванию которой можно было измерять силу притяжения шаров друг к другу. Верхний конец нити был закреплен в установочной головке, поворотом которой можно было менять расстояние между шарами  $m$  и  $M$ . Наиболее точным из определенных разными способами считается значение

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2.$$

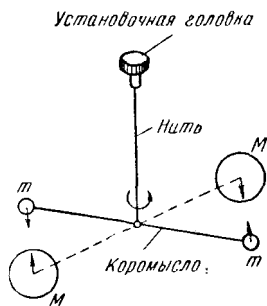


Рис. 130.

Если в (46.5) подставить  $m_1$ ,  $m_2$  и  $r$ , равные единице, то сила оказывается численно равной  $\gamma$ . Таким образом, два шара с массой 1 кг каждый, центры которых отстоят друг от друга на 1 м, притягиваются взаимно с силой, равной  $6,670 \cdot 10^{-11}$  н.

#### § 47. Зависимость ускорения тяжести от широты местности

При изучении движения тел относительно земной поверхности нужно иметь в виду, что система отсчета, связанная с Землей, не инерциальна. Ускорение, соответствующее движению по орбите, гораздо меньше, чем ускорение, связанное с суточным вращением Земли. Поэтому с достаточной точностью можно считать, что система отсчета, связанная с Землей, вращается относительно инерциальных систем с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Следовательно, рассматривая движение тел относительно Земли, нужно вводить центробежную силу инерции

$$\vec{f}_{in} = m\omega^2\vec{r},$$

где  $m$  — масса тела,  $r$  — расстояние тела от земной оси (рис. 131).

Ограничиваясь случаями, когда высота тел над поверхностью Земли невелика, можно положить  $r$  равным  $R_3 \cos \varphi$  ( $R_3$  — радиус Земли,  $\varphi$  — широта местности).

Тогда выражение для центробежной силы инерции примет вид

$$f_{in} = m\omega^2 R_3 \cos \varphi. \quad (47.1)$$

Наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения тел  $\mathbf{g}$  будет обусловлено действием двух

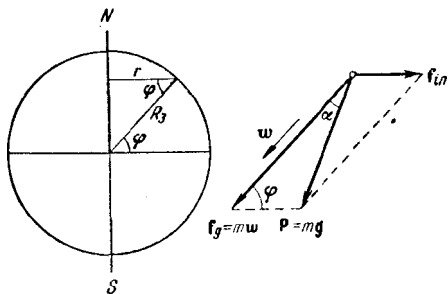


Рис. 131.

сил:  $\mathbf{f}_g$ , с которой тело притягивается Землей, и  $\mathbf{f}_{in}$ . Результирующая этих двух сил

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_{in}$$

есть сила тяжести (см. § 18). Поскольку сила  $\mathbf{P}$  сообщает телу с массой  $m$  ускорение  $\mathbf{g}$ , справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}. \quad (47.2)$$

Отличие силы тяжести  $\mathbf{P}$  от силы притяжения к Земле  $\mathbf{f}_g$  невелико, так как центробежная сила инерции значительно меньше, чем  $\mathbf{f}_g$ . Так, для массы в 1 кг выражение  $m\omega^2 R_3$  приблизительно равно 0,035 н ( $\omega$  равна  $2\pi$ , деленным на 86 400 сек,  $R_3$  составляет примерно 6400 км), в то время как  $f_g$  равна приблизительно 9,8 н, т. е. почти в 300 раз больше, чем максимальное значение центробежной силы инерции (наблюдающееся на экваторе).

Угол  $\alpha$  между направлениями  $\mathbf{f}_g$  и  $\mathbf{P}$  можно оценить, воспользовавшись теоремой синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{f_{in}}{P} = \frac{m\omega^2 R_3 \cos \varphi}{mg} \approx \frac{0,035}{9,8} \cos \varphi \approx 0,0035 \cos \varphi,$$

откуда

$$\sin \alpha \approx 0,0035 \sin \varphi \cos \varphi \approx 0,0018 \sin 2\varphi.$$

Синус малого угла можно приближенно заменить значением самого угла

$$\alpha \approx 0,0018 \sin 2\varphi. \quad (47.3)$$

Таким образом, в зависимости от широты  $\varphi$  угол  $\alpha$  колеблется в пределах от нуля (на экваторе, где  $\varphi = 0$ , и на полюсах, где  $\varphi = 90^\circ$ ) до  $0,0018$  рад или  $6'$  (на широте  $45^\circ$ ).

Направление  $\mathbf{P}$  совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса. Сила  $f_g$  направлена к центру Земли. Следовательно, нить отвеса направлена к центру Земли только на полюсах и на экваторе, отклоняясь на промежуточных широтах на угол, определяемый выражением (47.3).

Разность  $f_g - P$  равна нулю на полюсах и достигает максимума, равного  $0,3\%$  силы  $f_g$ , на экваторе. Из-за сплюснутости земного шара у полюсов сила  $f_g$  сама по себе несколько варьирует с широтой, будучи на экваторе примерно на  $0,2\%$  меньше, чем у полюсов. В итоге ускорение свободного падения  $g$  меняется с широтой в пределах от  $9,780$  м/сек<sup>2</sup> на экваторе до  $9,832$  м/сек<sup>2</sup> на полюсах. Значение  $g = 9,80665$  м/сек<sup>2</sup> принято в качестве нормального (стандартного) значения.

Заметим, что относительно инерциальной, например, гелиоцентрической системы отсчета свободно падающее тело будет двигаться с ускорением не  $g$ , а  $w$ , направленным так же, как  $f_g$ , и равным по величине  $f_g/m$ . Легко видеть (см. рис. 131), что из равенства для разных тел ускорения  $g$  вытекает и равенство ускорений  $w$ . Действительно, треугольники, построенные на векторах  $f_g$  и  $\mathbf{P}$  для разных тел, подобны (углы  $\alpha$  и  $\varphi$  для всех тел, находящихся в данной точке земной поверхности, будут одинаковыми). Следовательно, отношение  $f_g/P$ , которое совпадает с отношением  $w/g$ , для всех тел одно и то же, откуда вытекает, что при одинаковых  $g$  получаются одинаковыми и  $w$ .

## § 48. Масса инертная и масса гравитационная

Масса фигурирует в двух различных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором — гравитационные свойства, т. е. способ-



ность тел притягивать друг друга. В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать инертную массу  $m_{in}$  и массу гравитационную (или тяготеющую)  $m_g$ .

Ответ на этот вопрос может дать только опыт. Рассмотрим в гелиоцентрической системе отсчета свободное падение тел. Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения к Земле, которая согласно (46.5) равна

$$f = \gamma \frac{m_g M_3}{R_3^2}$$

( $m_g$  — гравитационная масса данного тела,  $M_3$  — гравитационная масса Земли,  $R_3$  — радиус земного шара).

Под действием этой силы тело приобретает ускорение  $\omega$  (но не  $g$ ; см. предыдущий параграф), которое должно быть равно силе  $f$ , деленной на инертную массу тела  $m_{in}$ :

$$\omega = \frac{f}{m_{in}} = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} \frac{m_g}{m_{in}}. \quad (48.1)$$

Опыт показывает, что ускорение  $\omega$  для всех тел одинаково (из одинаковости  $g$  вытекает, как мы видели ранее, одинаковость  $\omega$ ). Множитель  $\gamma \frac{M_3}{R_3^2}$  также одинаков для всех тел. Следовательно, и отношение  $m_g/m_{in}$  оказывается для всех тел одним и тем же. К такому же результату приводят и все другие опыты, в которых могло бы проявиться различие между инертной и гравитационной массами.

Вся совокупность опытных фактов указывает на то, что инертная и гравитационная массы всех тел строго пропорциональны друг другу. Это означает, что при надлежащем выборе единиц измерения гравитационная и инертная массы становятся тождественными, поэтому в физике говорят просто о массе. Тождественность гравитационной и инертной масс положена Эйнштейном в основу общей теории относительности.

Отметим, что с самого начала массу в (46.1) мы полагали совпадающей с инертной массой тел, вследствие чего численное значение  $\gamma$  нами было определено

в предположении, что  $m_g = m_{in}$ . Поэтому (48.1) можно записать в виде

$$\omega = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (48.2)$$

Последнее соотношение позволяет определить массу Земли  $M_3$ . Подстановка в него измеренных значений  $\omega$ ,  $R_3$  и  $\gamma$  дает для массы Земли значение  $5,98 \cdot 10^{24}$  кг.

Далее, зная радиус земной орбиты  $R_{ор}$  и время полного обращения Земли вокруг Солнца  $T$ , можно найти массу Солнца  $M_c$ . Ускорение Земли, равное  $\omega^2 R_{ор}$  ( $\omega = 2\pi/T$ ), обуславливается силой притяжения Земли к Солнцу. Следовательно,

$$M_3 \omega^2 R_{ор} = \gamma \frac{M_3 M_c}{R_{ор}^2},$$

откуда может быть вычислена масса Солнца.

Подобным же образом были определены массы других небесных тел.

## § 49. Законы Кеплера

Основанием для установления закона всемирного тяготения Ньютону послужили три открытых Кеплером закона движения планет:

1. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус-вектор планеты описывает за равные времена одинаковые площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Первый закон Кеплера указывает на то, что планеты движутся в поле центральных сил. Действительно, как мы видели в § 37, траектория тела в поле центральных сил представляет собой плоскую кривую — гиперболу, параболу или эллипс, — фокус которой совпадает с центром сил.

Принимая для простоты, что орбиты являются не эллипсами, а окружностями (это допустимо, так как практически орбиты всех планет мало отличаются от

окружностей), ускорение, с которым движется планета, можно написать в виде

$$\omega = \frac{v^2}{r},$$

где  $v$  — скорость движения планеты,  $r$  — радиус орбиты. Заменяем  $v$  через  $2\pi r/T$  ( $T$  — период обращения планеты вокруг Солнца):

$$\omega = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

На основании последнего выражения отношение сил, действующих на планеты со стороны Солнца, запишется следующим образом:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 \omega_1}{m_2 \omega_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2}.$$

Заменяя в соответствии с третьим законом Кеплера отношение квадратов периодов обращения отношением кубов радиусов орбит, получим:

$$f_1 : f_2 = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}.$$

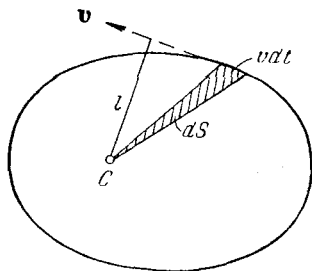


Рис. 132.

Таким образом, из третьего закона Кеплера следует, что сила, с которой планета притягивается к Солнцу, пропорциональна массе планеты и обратно пропорциональна квадрату ее расстояния до Солнца:

$$f = k \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Предположив, что коэффициент пропорциональности  $k$  в свою очередь пропорционален массе Солнца  $M_C$ , Ньютон пришел к уже знакомой нам формуле

$$f = \gamma \frac{m M_C}{r^2},$$

выражающей закон всемирного тяготения.

Второй закон Кеплера является следствием закона сохранения момента импульса. Из рис. 132 видно, что описанная радиусом-вектором за время  $dt$  площадь  $dS$  равна половине произведения основания треугольника

$v dt$  на высоту треугольника  $l$ , которая совпадает с плечом импульса планеты  $mv$  по отношению к Солнцу:

$$dS = \frac{1}{2} lv dt = \frac{L}{2m} dt$$

( $L$  — момент импульса планеты, равный  $mv l$ ).

Выражение  $\frac{dS}{dt}$  называется секториальной скоростью.

Таким образом,

$$\text{секториальная скорость} = \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

Момент импульса в центральном поле сил остается постоянным, следовательно, и секториальная скорость планеты должна быть постоянной. Это означает, что за равные промежутки времени радиус-вектор будет описывать одинаковые площади.

## § 50. Космические скорости

Для того чтобы двигаться вокруг Земли по круговой орбите с радиусом, мало отличающимся от радиуса Земли  $R_3$ , тело должно обладать вполне определенной скоростью  $v_1$ , величину которой можно определить из условия равенства произведения массы тела на центростремительное ускорение силе тяжести, действующей на тело:

$$m \frac{v_1^2}{R_3} = mg.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{gR_3}. \quad (50.1)$$

Следовательно, для того чтобы какое-либо тело стало спутником Земли, ему необходимо сообщить скорость  $v_1$ , которая называется первой космической скоростью. Подстановка значений  $g$  и  $R_3$  дает для первой космической скорости следующее значение:

$$v_1 = \sqrt{gR_3} = \sqrt{9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/сек} = 8 \text{ км/сек}.$$

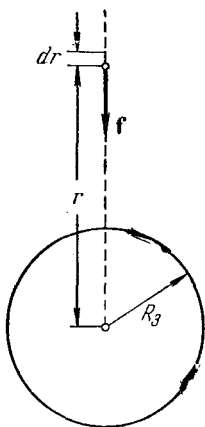


Рис. 133.

Следовательно, для того чтобы какое-либо тело стало спутником Земли, ему необходимо сообщить скорость  $v_1$ , которая называется первой космической скоростью. Подстановка значений  $g$  и  $R_3$  дает для первой космической скорости следующее значение:

$$v_1 = \sqrt{gR_3} = \sqrt{9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/сек} = 8 \text{ км/сек}.$$

Обладая скоростью  $v_1$ , тело не упадет на Землю. Однако этой скорости не достаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения, т. е. удалиться от Земли на такое расстояние, что притяжение к Земле перестает играть существенную роль. Необходимая для этого скорость  $v_2$  называется второй космической скоростью.

Для того чтобы найти вторую космическую скорость, нужно вычислить работу, которую необходимо совершить против сил земного тяготения для удаления тела с поверхности Земли на бесконечность. В § 26 мы доказали, что работа в поле центральных сил не зависит от пути. Вычислим работу, совершаемую при перемещении тела вдоль прямой, проходящей через центр Земли (рис. 133). Элементарная работа на пути  $dr$  будет равна

$$dA = f dr = \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr.$$

Работу на пути от  $r = R_3$  до  $r = \infty$  находим интегрированием:

$$A = \int dA = \int_{R_3}^{\infty} \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM_3}{r} \Big|_{R_3}^{\infty} = \gamma \frac{mM_3}{R_3}. \quad (50.2)$$

Полагая силу тяжести равной силе притяжения к Земле, можно написать:

$$mg = \gamma \frac{mM_3}{R_3^2}; \quad \text{отсюда} \quad \gamma \frac{mM_3}{R_3} = mgR_3.$$

Таким образом, работа (50.2) может быть представлена в виде

$$A = mgR_3. \quad (50.3)$$

Чтобы преодолеть притяжение Земли и выйти за пределы действия сил земного тяготения, тело должно обладать запасом энергии, достаточным для совершения работы (50.3). Минимальная необходимая для этого скорость  $v_2$  и есть вторая космическая скорость. Она определяется условием

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_3,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gR_3}. \quad (50.4)$$

Из сравнения (50.4) с (50.1) видно, что вторая космическая скорость в  $\sqrt{2}$  раз больше первой. Умножая 8 км/сек на  $\sqrt{2}$ , получаем для  $v_2$  значение порядка 11 км/сек.

Впервые космические скорости были достигнуты в СССР. 4 октября 1957 г. в Советском Союзе был осуществлен первый в истории человечества успешный запуск искусственного спутника Земли. 2 января 1959 г. был взят и второй рубеж. В этот день с советской земли отправилась в полет космическая ракета, которая вышла из сферы земного притяжения и стала первой искусственной планетой нашей солнечной системы. 12 апреля 1961 г. в Советском Союзе был осуществлен первый в мире полет человека в космическое пространство. Первый советский космонавт Юрий Алексеевич Гагарин совершил полет вокруг Земли и благополучно приземлился.

## СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Разделы механики, занимающиеся изучением жидкостей и газов, называются гидромеханикой и аэромеханикой. Они в свою очередь подразделяются на гидро- и аэростатику (изучающие равновесие жидкостей и газов) и гидро- и аэродинамику (изучающие движение жидкостей и газов). В настоящей главе излагается статика.

## § 51. Давление

Жидкие и газообразные тела характерны тем, что не оказывают сопротивления сдвигу и поэтому способны изменять свою форму под воздействием сколь угодно малых сил. Для изменения объема жидкости или газа требуются, напротив, конечные внешние силы. При изменениях объема, происходящих в результате внешних воздействий, в жидкости и газе возникают упругие силы, в конце концов, уравнивающие действие внешних сил. Упругие свойства жидкостей и газов проявляются в том, что отдельные части их действуют друг на друга или на соприкасающиеся с ними тела с силой, зависящей от степени сжатия жидкости или газа. Это воздействие характеризуют величиной, называемой давлением.

Рассмотрим жидкость, находящуюся в равновесии. Это означает, что отдельные ее части не перемещаются друг относительно друга или относительно граничащих с ними тел. Проведем в жидкости мысленно площадку  $\Delta S$  (рис. 134). Соприкасающиеся по этой площадке части жидкости действуют друг на друга с равными по величине противоположно направленными силами. Чтобы выяснить характер этих сил, уберем мысленно

жидкость с одной стороны площадки и заменим действие удаленной жидкости силами такой величины и направления, чтобы состояние равновесия остальных частей не было нарушено. Эти силы должны быть нормальны к  $\Delta S$ , так как в противном случае их тангенциальная составляющая привела бы частицы жидкости в движение и равновесие было бы нарушено. Следовательно, и равнодействующая  $\Delta f$  всех сил, с которыми жидкость действует на площадку  $\Delta S$ , также направлена по нормали к этой площадке. Сила  $\Delta f$ , отнесенная к единице поверхности площадки, называется давлением в жидкости. Таким образом, давление  $p$  по определению равно

$$p = \frac{\Delta f}{\Delta S}. \quad (51.1)$$

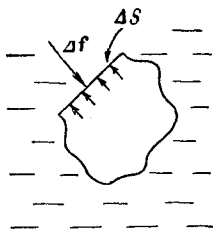


Рис. 134.

Если сила, с которой жидкость действует на площадку  $\Delta S$ , распределяется по ней неравномерно, выражение (51.1) определяет среднее давление. Чтобы получить давление в данной точке, нужно устремить  $\Delta S$  к нулю. Следовательно, давление в точке определяется выражением

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{df}{dS}. \quad (51.2)$$

Давление в газе определяется аналогичным образом.

Давление — скаляр, так как величина его в данной точке жидкости (или газа) не зависит от ориентации площадки  $\Delta S$ , к которой отнесено давление. Для доказательства этого утверждения воспользуемся так называемым принципом отвердевания, согласно которому любой объем жидкости можно, не нарушая условий равновесия, заменить твердым телом с плотностью, равной плотности жидкости.

Выделим мысленно в окрестности рассматриваемой точки отвердевший объем жидкости в виде трехгранной призмы, изображенной в перспективе на рис. 135, а и в двух проекциях на рис. 135, б. На каждую грань призмы будет действовать направленная по нормали к ней поверхностная сила, равная произведению соответствующего давления на величину поверхности. Кроме того, на



призму будет действовать объемная сила, равная весу призмы. Поскольку поверхность пропорциональна второй степени, а объем — третьей степени линейных размеров тела, при уменьшении размеров призмы объемная сила будет стремиться к нулю гораздо быстрее, чем поверхностные силы. Имея в виду, что в конечном итоге мы будем делать предельный переход, стягивая выделенный объем в точку, объемной силой можно пренебречь в самом начале рассуждений. Тогда условие равновесия

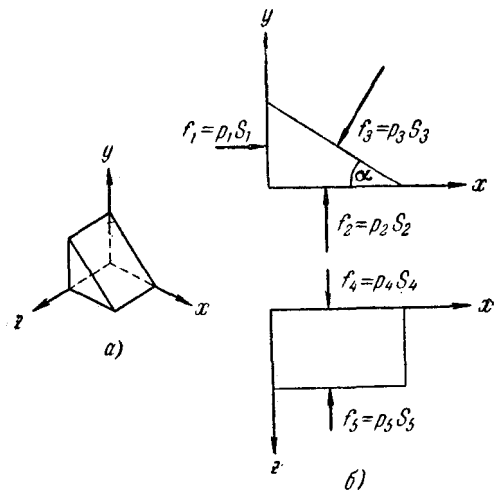


Рис. 135.

будет заключаться в том, что сумма поверхностных сил должна быть равна нулю. В проекциях на указанные на рис. 135, б оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  условия равновесия запишутся следующим образом:

$$\rho_1 S_1 = \rho_3 S_3 \sin \alpha, \quad \rho_2 S_2 = \rho_3 S_3 \cos \alpha, \quad \rho_4 S_4 = \rho_5 S_5. \quad (51.3)$$

Как видно из рис. 135, б, между поверхностями граней призмы имеются соотношения:

$$S_1 = S_3 \sin \alpha, \quad S_2 = S_3 \cos \alpha, \quad S_4 = S_5,$$

с учетом которых формулы (51.3) принимают вид

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3, \quad \rho_4 = \rho_5. \quad (51.4)$$

Вследствие предполагаемого предельного перехода, при котором выделенный объем стягивается в точку, давления  $p_1, p_2, p_3$  и т. д. можно считать относящимися к одной и той же точке жидкости.

Поскольку ориентация призмы в пространстве и угол  $\alpha$  были произвольны, из (51.4) вытекает, что величина давления не зависит от ориентации площадки, к которой оно относится, а это и требовалось доказать.

На первый взгляд может показаться удивительным, что пропорциональное векторной величине (силе) давление оказывается скалярной величиной. Однако следует иметь в виду, что площадка  $\Delta S$  также может рассматриваться как вектор, имеющий направление нормали к  $\Delta S$ , т. е. такое же направление, как и вектор силы, действующей на площадку. Следовательно, давление, по существу, равно отношению двух коллинеарных векторов  $\Delta \mathbf{f}$  и  $\Delta \mathbf{S}$ , а такая величина, как известно, представляет собой скаляр.

Единицами давления являются:

- 1) в СИ —  $\text{н/м}^2$ ;
- 2) в системе СГС —  $\text{дин/см}^2$ .

Кроме того, для измерения давления часто пользуются следующими внесистемными единицами:

1) технической атмосферой (обозначается  $ат$ ), равной  $1 \text{ кгс/см}^2$ ;

2) физической или нормальной атмосферой (обозначается  $атм$ ), равной давлению, оказываемому столбом ртути высотой  $760 \text{ мм}$ .

В физике часто измеряют давление в миллиметрах ртутного столба. Между различными единицами давления имеются следующие соотношения:

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 0,001 \text{ м} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/сек}^2 = 133 \text{ н/м}^2;$$

$$1 \text{ атм} = 760 \cdot 133 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 = 1,033 \text{ ат};$$

$$1 \text{ ат} = 9,81 \cdot 10^4 \approx 0,981 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 = 0,068 \text{ атм}.$$

## § 52. Распределение давления в покоящихся жидкости и газе

Если бы в жидкости (или газе) не было объемных сил, то условием равновесия было бы постоянство давления во всем объеме (закон Паскаля). Действительно, выделим в жидкости небольшой произвольно ориенти-

рованный цилиндрический объем высотой  $\Delta l$  и основанием  $\Delta S$  (рис. 136). Если бы в точках, отстоящих друг от друга на  $\Delta l$ , давление отличалось на  $\Delta p$ , то вдоль оси цилиндра действовала бы сила  $\Delta p \Delta S$ , вследствие чего жидкость пришла бы в движение и равновесие было бы нарушено. Следовательно, при отсутствии объемных

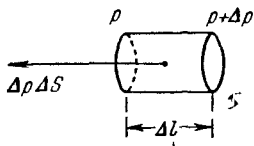


Рис. 136.

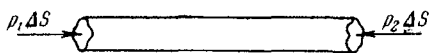


Рис. 137.

сил в состоянии равновесия в любом месте жидкости должно выполняться условие  $\frac{\Delta p}{\Delta l} = 0$ , откуда следует, что  $p = \text{const}$ .

Рассмотрим распределение давления при наличии объемных сил. Выделим в жидкости отвердевший объем в виде горизонтально расположенного цилиндра малого сечения  $\Delta S$  (рис. 137). Поскольку объемная сила направлена по вертикали, вдоль оси цилиндра будут действовать только две силы:  $p_1 \Delta S$  и  $p_2 \Delta S$ . Из условия равновесия следует, что  $p_1 = p_2$ ; значит, во всех точках жидкости, лежащих на одном уровне (т. е. в одной горизонтальной плоскости), давление имеет одинаковую величину.

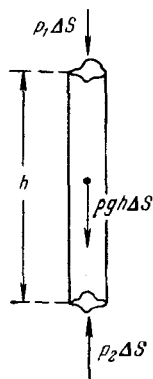


Рис. 138.

Теперь выделим отвердевший цилиндрический объем жидкости таким образом, чтобы его ось была вертикальна (рис. 138). В этом случае вдоль оси цилиндра, кроме сил давления на основания, будет действовать также объемная сила  $\rho g h \Delta S$  ( $\rho$  — плотность жидкости,  $h$  — высота цилиндра) и условие равновесия имеет вид

$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \rho g h \Delta S.$$

Сокращая на  $\Delta S$ , имеем:

$$p_2 = p_1 + \rho gh. \quad (52.1)$$

Таким образом, давления на двух разных уровнях отличаются на величину, численно равную весу вертикального столба жидкости, заключенного между этими уровнями, с площадью сечения, равной единице.

### § 53. Выталкивающая сила

Следствием неодинаковости давлений на разных уровнях является наличие выталкивающей силы (силы Архимеда), действующей на тела, находящиеся в жидкости или газе. Чтобы найти величину и направление выталкивающей силы, заменим тело отвердевшим объемом

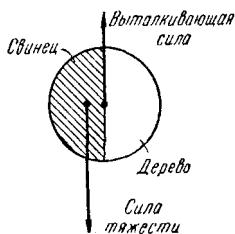


Рис. 139.

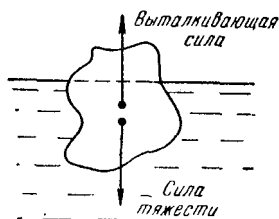


Рис. 140.

жидкости (газа). Поскольку этот объем будет находиться в равновесии, сила его веса должна уравниваться равнодействующей всех сил давления, действующих на его поверхность. Такие же поверхностные силы действуют и на само тело, и их равнодействующая дает выталкивающую силу.

Из сказанного следует, что выталкивающая сила равна весу жидкости в объеме тела и действует вверх по вертикали. Отвердевший объем остается в равновесии при любых его ориентациях (состояние безразличного равновесия). Следовательно, точка приложения выталкивающей силы совпадает с центром тяжести объема тела. Центр тяжести самого тела совпадает с центром тяжести объема лишь в том случае, если плотность тела во всех точках одинакова. В противном случае они мо-

гут не совпадать. Для примера возьмем шар, сложенный из свинцовой и деревянной половинок (рис. 139). Выталкивающая сила будет приложена к центру шара, точка же приложения силы тяжести смещена в сторону свинцовой половины.

Если средняя плотность тела меньше, чем плотность жидкости, то в состоянии равновесия тело будет погружено в жидкость только частично. При этом сила тяжести (приложенная к центру тяжести тела) и выталкивающая сила (приложенная к центру тяжести погруженной в жидкость части объема тела) должны быть равны по величине и действовать вдоль одной и той же прямой (рис. 140), иначе они создадут вращательный момент и равновесие будет нарушено.

§ 54. Линии и трубки тока. Неразрывность струи

Чтобы описать движение жидкости, можно задать траекторию и скорость в функции от времени для каждой частицы жидкости. Такой способ описания разрабатывался Лагранжем. Но можно следить не за частицами жидкости, а за отдельными точками пространства и отмечать скорость, с которой проходят через каждую данную точку отдельные частицы жидкости. Второй способ называется методом Эйлера.

Состояние движения жидкости можно определить, указав для каждой точки пространства вектор скорости как функцию времени. Совокупность векторов  $v$ , заданных для всех точек пространства, образует так называемое поле вектора скорости, которое можно изобразить следующим образом. Проведем в движущейся жидкости линии так, чтобы касательная к ним в

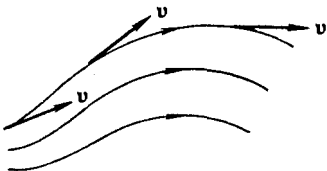


Рис. 141.

каждой точке совпадала по направлению с вектором  $v$  (рис. 141). Эти линии называются линиями тока.

Условимся проводить линии тока так, чтобы густота их (которая характеризуется отношением числа линий  $\Delta N$  к величине перпендикулярной к ним площадки  $\Delta S$ , через которую они проходят) была пропорциональна величине скорости в данном месте. Тогда по картине линий тока можно будет судить не только о направле-

нии, но и о величине вектора  $\mathbf{v}$  в разных точках пространства: там, где скорость больше, линии тока будут гуще и, наоборот, где скорость меньше, линии тока будут реже.

Поскольку величина и направление вектора  $\mathbf{v}$  в каждой точке могут меняться со временем, то и картина линий тока может непрерывно меняться. Если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется установившимся, или стационарным. При стационарном течении любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением  $\mathbf{v}$ . Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной, и линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется трубкой тока. Вектор  $\mathbf{v}$ , будучи в каждой точке касательным к линии тока, будет касательным и к поверхности трубки тока; следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Возьмем перпендикулярное к направлению скорости сечение трубки тока  $S$  (рис. 142). Предположим, что скорость движения частиц жидкости одинакова во всех

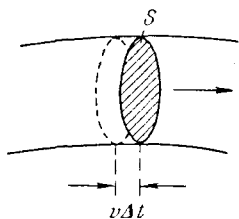


Рис. 142.

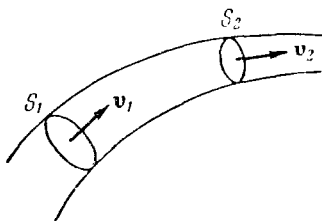


Рис. 143.

точках этого сечения. За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  пройдут все частицы, расстояние которых от  $S$  в начальный момент не превышает значения  $v \Delta t$ . Следовательно, за время  $\Delta t$  через сечение  $S$  пройдет объем жидкости, равный  $Sv \Delta t$ , а за единицу времени через сечение  $S$  пройдет объем жидкости, равный  $Sv$ . Возьмем трубку тока, настолько тонкую, что в каждом ее сечении скорость можно считать постоянной. Если жидкость несжимаема (т. е. плотность ее всюду одинакова и изменяться не

может), то количество жидкости между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 143) будет оставаться неизменным. Отсюда следует, что объемы жидкости, протекающие за единицу времени через сечения  $S_1$  и  $S_2$ , должны быть одинаковы:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

(напомним, что через боковую поверхность трубки тока частицы жидкости не проходят).

Приведенное выше рассуждение применимо к любой паре сечений  $S_1$  и  $S_2$ . Следовательно, для несжимаемой жидкости величина  $Sv$  в любом сечении одной и той же трубки тока должна быть одинакова:

$$Sv = \text{const.} \quad (54.1)$$

Полученный нами результат представляет собой содержание теоремы о неразрывности струи.

Из (54.1) следует, что при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением. В горизонтальной трубке тока (рис. 144) это ускорение может быть обусловлено только непостоянством давления вдоль оси трубки — в местах, где скорость меньше, давление должно быть больше, и наоборот. Количественная связь между скоростью течения и давлением будет установлена в следующем параграфе.

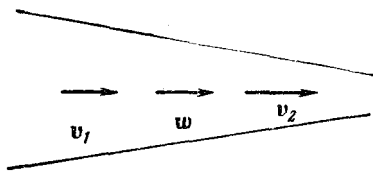


Рис. 144.

Теорема о неразрывности струи применима к

реальным жидкостям и даже к газам в том случае, когда сжимаемостью их можно пренебречь. Соответствующий расчет показывает, что при движении жидкостей и газов со скоростями, меньшими скорости звука, их с достаточной степенью точности можно считать несжимаемыми.

## § 55. Уравнение Бернулли

Рассматривая движение жидкостей, во многих случаях можно считать, что перемещение одних частей жидкости относительно других не связано с возникновением сил трения. Жидкость, в которой внутреннее



трение (вязкость) полностью отсутствует, называется идеальной.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока малого сечения (рис. 145). Рассмотрим объем жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . За время  $\Delta t$  этот объем переместится вдоль трубки тока, причем сечение  $S_1$  переместится в положение  $S'_1$ , пройдя путь  $\Delta l_1$ , сечение  $S_2$  переместится в положение  $S'_2$ , пройдя путь  $\Delta l_2$ . В силу неразрывности струи заштрихованные объемы будут иметь одинаковую величину:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ .

Энергия каждой частицы жидкости складывается из ее кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения. Вследствие стационарности течения частица, находящаяся спустя время  $\Delta t$  в любой из точек незаштрихованной части рассматриваемого объема (см., например, точку  $O$  на рис. 145), имеет такую же скорость (а следовательно, и кинетическую энергию), какую имела частица, находившаяся в той же точке в начальный момент времени. Поэтому приращение энергии  $\Delta E$  всего рассматриваемого объема можно вычислить как разность энергий заштрихованных объемчиков  $\Delta V_2$  и  $\Delta V_1$ .

Возьмем сечение трубки тока и отрезки  $\Delta l$  настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объемчиков можно было приписать одно и то же значение скорости  $v$ , давления  $p$  и высоты  $h$ . Тогда приращение энергии запишется следующим образом:

$$\Delta E = \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (55.1)$$

( $\rho$  — плотность жидкости).

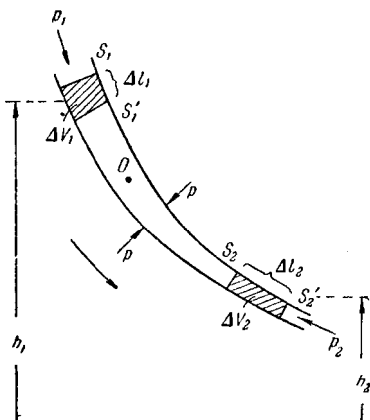


Рис. 145.

В идеальной жидкости силы трения отсутствуют. Поэтому приращение энергии (55.1) должно равняться работе, совершаемой над выделенным объемом силами давления. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, к которым они приложены, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям  $S_1$  и  $S_2$ . Эта работа равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (55.2)$$

Приравнивая выражения (55.1) и (55.2), сокращая на  $\Delta V$  и перенося члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (55.3)$$

Сечения  $S_1$  и  $S_2$  были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока выражение  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$  имеет одинаковое значение. В соответствии со сделанными нами при его выводе предположениями уравнение (55.3) становится вполне точным лишь при стремлении поперечного сечения  $S$  к нулю, т. е. при стягивании трубки тока в линию. Таким образом, величины  $p$ ,  $v$  и  $h$ , фигурирующие в левой и правой частях уравнения (55.3), следует рассматривать как относящиеся к двум произвольным точкам одной и той же линии тока.

Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом: в стационарно текущей идеальной жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.} \quad (55.4)$$

Уравнение (55.4) или равнозначное ему уравнение (55.3) называется уравнением Бернулли. Несмотря на то, что это уравнение было получено нами для идеальной жидкости, оно достаточно хорошо выполняется для реальных жидкостей, внутреннее трение в которых не очень велико.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из уравнения Бернулли. Пусть жидкость течет так, что скорость имеет во всех точках одинаковую величину. Тогда согласно (55.3) для двух произвольных точек любой линии тока будет выполняться равенство

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1),$$

откуда следует, что распределение давления в этом случае будет таким же, как в покоящейся жидкости [см. (52.1)].

Для горизонтальной линии тока условие (55.3) принимает вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

т. е. давление оказывается меньшим в тех точках, где скорость больше (качественно это уже было показано в предыдущем параграфе).

Уменьшение давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу устройства водоструйного насоса (рис. 146). Струя воды подается в трубку, открывающуюся в атмосферу, так что на выходе из трубки давление равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода идет с большей скоростью, вследствие чего давление в этом месте оказывается меньше атмосферного. Такое же давление устанавливается и в охватывающей трубку камере насоса, которая сообщается с трубкой через разрыв, имеющийся в узкой части трубки. Подсоединяя к камере насоса откачиваемый объем, из него можно откачать воздух (или какой-либо другой газ) до давления порядка 100 мм рт. ст. Откачиваемый воздух захватывается струей воды и уносится в атмосферу.

Применим уравнение Бернулли к случаю истечения жидкости из небольшого отверстия в широком открытом сосуде. Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своим сечением с одной стороны открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны — отверстие,

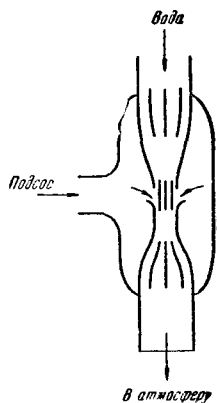


Рис. 146.

через которое жидкость вытекает<sup>1)</sup> (рис. 147). В каждом из этих сечений скорость и высоту над некоторым исходным уровнем можно считать одинаковыми, вследствие чего к ним можно применить уравнение (55.3), полученное при этом предположении.

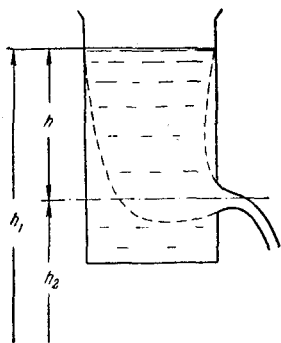


Рис. 147.

Далее, давления в обоих сечениях равны атмосферному и поэтому одинаковы. Кроме того, скорость перемещения открытой поверхности в широком сосуде можно положить равной нулю. С учетом всего сказанного, уравнение (55.3) применительно к данному случаю можно написать в виде

$$\rho gh_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh_2,$$

где  $v$  — скорость истечения из отверстия. Сокращая на  $\rho$  и введя  $h = h_1 - h_2$  — высоту открытой поверхности жидкости над отверстием, получаем:

$$\frac{v^2}{2} = gh, \text{ откуда } v = \sqrt{2gh}. \quad (55.5)$$

Эта формула называется формулой Торричелли.

Итак, скорость истечения жидкости из отверстия, расположенного на глубине  $h$  под открытой поверхностью, совпадает со скоростью, которую приобретает любое тело, падая с высоты  $h$ . Следует помнить, что этот результат получен в предположении, что жидкость идеальна. Для реальных жидкостей скорость истечения будет меньше, причем тем сильнее отличается от значения (55.5), чем больше вязкость жидкости.

## § 56. Измерение давления в текущей жидкости

В предыдущем параграфе мы выяснили, что давление в жидкости связано с величиной скорости течения. Введение в жидкость прибора для измерения давления нарушает характер движения жидкости, а следовательно

<sup>1)</sup> Точнее, сечение струи при выходе из отверстия. Если не принять специальных мер, то сечение струи будет меньше отверстия.

но, может изменить и величину измеряемого давления. Поместим в жидкость изогнутую манометрическую трубку с входным отверстием, обращенным навстречу потоку (рис. 148). Такую трубку называют трубкой Пито. Рассмотрим линию тока, упирающуюся своим концом в центр отверстия трубки. Скорость вдоль рассматриваемой линии тока будет изменяться от  $v$  для невозмущенного потока на больших расстояниях от трубки до нуля непосредственно перед отверстием. Согласно уравнению Бернулли давление перед отверстием

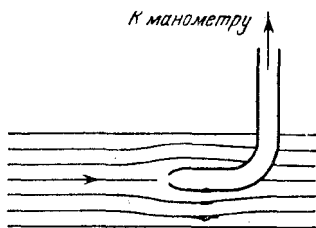


Рис. 148.

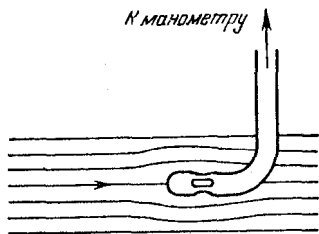


Рис. 149.

(а следовательно, и в манометрической трубке) будет превышать давление в невозмущенном потоке  $p$  на величину  $\rho v^2/2$ . Следовательно, манометр, соединенный с трубкой Пито, покажет давление, равное

$$p' = p + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (56.1)$$

Имеющее размерность давления слагаемое  $\rho v^2/2$  называют динамическим давлением. Давление  $p$  принято называть статическим. Давление  $p'$ , равное сумме статического и динамического давлений, называется полным давлением. Таким образом, с помощью трубки Пито можно измерять полное давление (56.1).

Если в тонкой изогнутой трубке сделать боковые отверстия, то скорость (а следовательно, и давление) вблизи таких отверстий будет мало отличаться от скорости (и давления) невозмущенного потока (рис. 149). Поэтому манометр, присоединенный к такой трубке, называемой зондом, покажет статическое давление в жидкости  $p$ .

Зная полное и статическое давления, можно найти динамическое давление  $\rho v^2/2$ , а следовательно, и скорость течения  $v$  (плотность жидкости предполагается известной). Если трубку Пито и зонд смонтировать вместе, как показано на рис. 150, и подсоединить к разным коленам дифференциального манометра (т. е. манометра, измеряющего разность давлений), то показания манометра будут непосредственно давать динамическое давление. Проградуировав манометр в значениях скорости  $v$ , можно получить прибор для измерения скорости течения жидкости.

К дифф. манометру

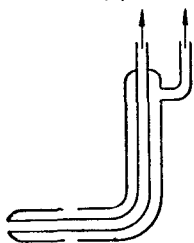


Рис. 150.

Если трубку Пито и зонд смонтировать вместе, как показано на рис. 150, и подсоединить к разным коленам дифференциального манометра (т. е. манометра, измеряющего разность давлений), то показания манометра будут непосредственно давать динамическое давление. Проградуировав манометр в значениях скорости  $v$ , можно получить прибор для измерения скорости течения жидкости.

### § 57. Применение к движению жидкости закона сохранения импульса

К жидкостям и газам, как и к другим телам, применим закон сохранения импульса. Используем этот закон для решения некоторых задач.

**Реакция текущей жидкости на стенки изогнутой трубы.** Предположим, что в изогнутой трубе установился стационарный поток несжимаемой жидкости (рис. 151). Для простоты возьмем трубу постоянного сечения  $S$ . Тогда в силу неразрывности струи скорость в каждом сечении будет одинакова по величине и равна  $v$ .

Рассмотрим объем изогнутого участка трубы, ограниченного сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . За время  $\Delta t$  в этот объем будет втекать через сечение  $S_1$  количество жидкости  $Sv\Delta t$ , обладающее импульсом <sup>1)</sup>  $K_1 = \rho S v v_1 \Delta t$ . Одновременно из этого объема будет вытекать

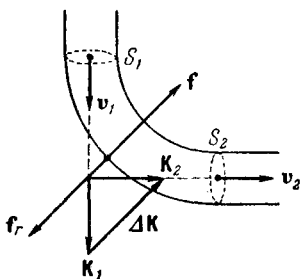


Рис. 151.

<sup>1)</sup> Давление обозначается той же буквой  $p$ , что и импульс. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, мы будем обозначать импульс буквой  $K$ .

через сечение  $S_2$  такое же количество жидкости, обладающее импульсом  $K_2 = \rho S v_2 \Delta t$ . Таким образом, стенки изогнутого участка трубы сообщают за время  $\Delta t$  текущей мимо них жидкости приращение импульса  $\Delta K = K_2 - K_1 = \rho S v (v_2 - v_1) \Delta t$ . Как мы знаем, приращение импульса тела за единицу времени равно действующей на тело силе. Следовательно, стенки трубы действуют на жидкость с силами, равнодействующая которых равна  $f = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho S v (v_2 - v_1)$ . По третьему закону Ньютона текущая жидкость действует на стенки трубы с силами, равнодействующая которых равна

$$f_r = \rho S v (v_1 - v_2). \quad (57.1)$$

Силу  $f_r$  называют реакцией текущей жидкости на стенки трубы.

**Реакция вытекающей струи.** Струя жидкости, вытекающая из отверстия в сосуде (рис. 152), уносит с собой за время  $\Delta t$  импульс  $\Delta K = \rho S v v \Delta t$  ( $\rho$  — плотность жидкости,  $S$  — площадь отверстия,  $v$  — скорость истечения струи). Этот импульс сообщается вытекающей жидкости сосудом. По третьему закону Ньютона сосуд получает от вытекающей жидкости за время  $\Delta t$  импульс, равный  $-\Delta K$ , т. е. испытывает действие силы

$$f_r = -\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\rho S v v. \quad (57.2)$$

Эта сила называется реакцией вытекающей струи. Если сосуд поставить на тележку, то под действием силы  $f_r$  он придет в движение в направлении, противоположном направлению струи.

Найдем величину силы  $f_r$ , воспользовавшись выражением (55.5) для скорости истечения жидкости из отверстия:

$$f_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \quad (57.3)$$

Если бы, как это может показаться на первый взгляд, сила  $f_r$  совпадала по величине с силой гидростатического давления, которое жидкость оказывала бы на пробку, закрывающую отверстие, то  $f_r$  была бы равна  $gh\rho S$ .

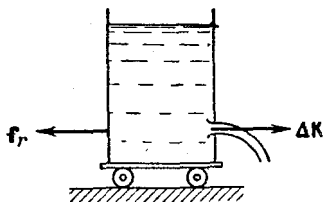


Рис. 152

На самом деле сила  $f_r$  оказывается в 2 раза большей. Это объясняется тем, что возникающее при вытекании струи движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления, причем давление вблизи стенки, лежащей против отверстия, оказывается несколько большим, чем вблизи стенки, в которой сделано отверстие.

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Реактивное движение, не нуждаясь для своего осуществления в наличии атмосферы, используется для полетов в космическое пространство.

Основоположником теории межпланетных сообщений является выдающийся русский ученый и изобретатель К. Э. Циолковский (1857—1935). Он дал теорию полета ракеты и обосновал возможность применения реактивных аппаратов для межпланетных сообщений. В частности, Циолковским была разработана теория движения составных ракет, в которых каждая последующая ступень вступает в действие после того, как предыдущая ступень, израсходовав полностью топливо, отделится от ракеты. Идеи Циолковского получили дальнейшее развитие и были осуществлены советскими учеными и инженерами, обеспечившими ведущую роль Советского Союза в освоении и изучении космического пространства.

## § 58. Силы внутреннего трения

Идеальная жидкость, т. е. жидкость без трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам в большей или меньшей степени присуща вязкость или внутреннее трение. Вязкость проявляется в том, что возникшее в жидкости или газе движение после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается.

Для выяснения закономерностей, которым подчиняются силы внутреннего трения, рассмотрим следующий опыт. В жидкость погружены две параллельные друг другу пластины (рис. 153), линейные размеры которых значительно превосходят расстояние между ними  $d$ . Нижняя пластина удерживается на месте, верхняя приводится в движение относительно нижней с некоторой скоростью  $v_0$ . Опыт дает, что для перемещения верхней пластины с постоянной скоростью  $v_0$  необходимо



действовать на нее с вполне определенной постоянной по величине силой  $f$ . Раз пластина не получает ускорения, значит, действие этой силы уравнивается равной ей по величине противоположно направленной силой, которая, очевидно, есть сила трения, действующая

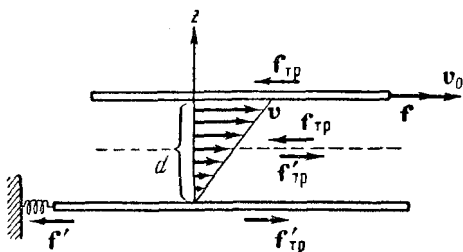


Рис. 153.

на пластину при ее движении в жидкости. Обозначим ее  $f_{тр}$ .

Варьируя скорость пластины  $v_0$ , площадь пластин  $S$  и расстояние между ними  $d$ , можно получить, что

$$f_{тр} = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (58.1)$$

где  $\eta$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния (например, температуры) жидкости и называемый коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости, или просто вязкостью жидкости (газа).

Нижняя пластина при движении верхней также оказывается подверженной действию силы  $f'_{тр}$ , равной по величине  $f_{тр}$ . Для того чтобы нижняя пластина оставалась неподвижной, силу  $f'_{тр}$  необходимо уравновесить с помощью силы  $f'$ .

Таким образом, при движении двух погруженных в жидкость пластин друг относительно друга между ними возникает взаимодействие, характеризуемое силой (58.1). Воздействие пластин друг на друга осуществляется, очевидно, через жидкость, заключенную между пластинами, передаваясь от одного слоя жидкости к другому. Если в любом месте зазора провести мысленно плоскость, параллельную пластинам (см. пунктирную линию на рис. 153), то можно утверждать, что часть

жидкости, лежащая над этой плоскостью, действует на часть жидкости, лежащую под плоскостью, с силой  $f'_{\text{тр}}$ , а часть жидкости, лежащая под плоскостью, в свою очередь действует на часть жидкости, лежащую над плоскостью, с силой  $f_{\text{тр}}$ , причем величина  $f_{\text{тр}}$  и  $f'_{\text{тр}}$  определяется формулой (58.1). Таким образом, формула (58.1) определяет не только силу трения, действующую на пластины, но и силу трения между соприкасающимися частями жидкости.

Если исследовать скорость частиц жидкости в разных слоях, то оказывается, что она изменяется в направлении  $z$ , перпендикулярном к пластинам (рис. 153), по линейному закону

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (58.2)$$

Частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с пластинами, как бы прилипают к ним и имеют такую же скорость, как и сами пластины. Согласно формуле (58.2)

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{d}. \quad (58.3)$$

Используя равенство (58.3), формуле (58.1) для силы внутреннего трения можно придать вид

$$f_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dz} S. \quad (58.4)$$

Величина  $\frac{dv}{dz}$  показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси  $z$ , и называется градиентом скорости (точнее, это — модуль градиента скорости; сам градиент — вектор).

Формула (58.4) была нами получена для случая, когда скорость изменяется по линейному закону (в этом случае градиент скорости является постоянным). Оказывается, что эта формула остается справедливой и для любого другого закона изменения скорости при переходе от слоя к слою. В этом случае для определения силы трения между двумя граничащими друг с другом слоями нужно брать значение градиента  $\frac{dv}{dz}$  в том месте, где проходит воображаемая поверхность раздела слоев. Так, например, при движении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенок трубы, максимальна на оси

трубы и, как можно показать, при не слишком больших скоростях течения изменяется вдоль любого радиуса по закону

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (58.5)$$

где  $R$  — радиус трубы,  $v_0$  — скорость на оси трубы,  $v$  — скорость на расстоянии  $r$  от оси трубы (рис. 154). Проведем в жидкости мысленно цилиндрическую поверхность радиуса  $r$ . Части жидкости, лежащие по разные стороны от этой поверхности, действуют друг на друга, с силой, величина которой в расчете на единицу поверхности равна

$$f = \eta \frac{dv}{dr} = \eta \frac{2v_0 r}{R^2},$$

т.е. возрастает пропорционально расстоянию поверхности раздела от оси трубы (знак «—», получающийся при дифференцировании (58.5) по  $r$ , мы опустили, поскольку формула (58.4) дает лишь модуль силы внутреннего трения).

Все сказанное в этом параграфе относится не только к жидкостям, но и к газам.

Единицей вязкости в СИ является такая вязкость, при которой градиент скорости, равный  $1 \text{ м/сек}$  на  $1 \text{ м}$ , приводит к возникновению силы внутреннего трения в  $1 \text{ н}$  на  $1 \text{ м}^2$  поверхности касания слоев. Эта единица обозначается  $\text{н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$ .

В СГС — системе единиц вязкости служит пуаз ( $\text{пз}$ ), равный такой вязкости, при которой градиент скорости в  $1 \text{ см/сек}$  на  $1 \text{ см}$  приводит к возникновению силы внутреннего трения в  $1 \text{ дин}$  на  $1 \text{ см}^2$  поверхности касания слоев. Единица, равная  $10^{-6}$  пуаза, называется микропуазом ( $\text{мпз}$ ).

Между пуазом и единицей вязкости в СИ имеется соотношение

$$1 \text{ н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2 = 10 \text{ пз}.$$

Коэффициент вязкости зависит от температуры, причем характер этой зависимости существенно различен для жидкостей и газов. У жидкостей коэффициент вязкости сильно уменьшается с повышением температуры. У газов, напротив, коэффициент вязкости с температурой растет. Отличие в характере поведения  $\eta$  при изменениях температуры указывает на различие механизма внутреннего трения в жидкостях и газах.

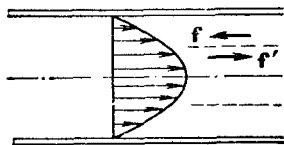


Рис. 154.

## § 59. Ламинарное и турбулентное течение

Наблюдается два вида течения жидкости (или газа). В одних случаях жидкость как бы разделяется на слои, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Такое течение называется ламинарным<sup>1)</sup> (слоистым). Если в ламинарный поток ввести подкрашенную струйку, то она сохраняется, не размываясь, на всей длине потока, так как частицы жидкости в ламинарном потоке не переходят из одного слоя в другой. Ламинарное течение стационарно.

При увеличении скорости или поперечных размеров потока характер течения существенным образом изменяется. Возникает энергичное перемешивание жидкости. Такое течение называется турбулентным. При турбулентном течении скорость частиц в каждом данном месте все время изменяется беспорядочным образом — течение нестационарно. Если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то уже на небольшом расстоянии от места ее введения окрашенная жидкость равномерно распределяется по всему сечению потока.

Показанный на рис. 154 характер изменения скорости течения с расстоянием от оси трубы относится к случаю ламинарного течения. При турбулентном течении можно говорить о среднем (по времени) значении скорости в каждой точке сечения трубы. «Профиль» средних скоростей при турбулентном течении изображен на рис. 155. Вблизи стенок трубы скорость изменяется гораздо сильнее, чем при ламинарном течении, но в остальной части сечения скорость изменяется меньше.

Английский ученый Рейнольдс установил, что характер течения зависит от значения безразмерной величины:

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (59.1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости (или газа),  $v$  — средняя (по сечению трубы) скорость потока,  $\eta$  — коэффициент вяз-

<sup>1)</sup> Латинское *lamina* означает пластинку, полосу.

кости жидкости,  $l$  — характерный для поперечного сечения размер, например, сторона квадрата при квадратном сечении, радиус или диаметр при круглом сечении и т. д.<sup>1)</sup>.

Величина (59.1) называется числом Рейнольдса. При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение. Начиная с некоторого определенного значения  $Re$ , называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Если в качестве характерного размера для круглой трубы взять ее радиус  $r$ , то критическое значение числа Рейнольдса (которое в этом случае имеет вид  $Re = \rho v r / \eta$ ) оказывается равным<sup>2)</sup> примерно 1000. В число Рейнольдса входят в виде отношения две величины, зависящие от свойств жидкости, — плотность  $\rho$  и коэффициент вязкости  $\eta$ . Отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (59.2)$$

называется кинематической вязкостью. В отличие от  $\nu$  величина  $\eta$  называется динамической вязкостью. Используя кинематическую вязкость, числу Рейнольдса можно придать следующий вид:

$$Re = \frac{vl}{\nu}. \quad (59.3)$$

Число Рейнольдса может служить критерием подобия для течения жидкостей в трубах, каналах и т. д. Характер течения различных жидкостей (или газов) в трубах разных сечений будет совершенно одинаков, если каждому течению соответствует одно и то же значение  $Re$ .

## § 60. Движение тел в жидкостях и газах

При движении тела в жидкости или газе<sup>3)</sup> на него действуют силы, равнодействующую которых мы

<sup>1)</sup> Рекомендуется читателю убедиться в том, что выражение (59.1) является безразмерным.

<sup>2)</sup> Очевидно, что, взяв в качестве  $l$  не радиус, а диаметр трубы, мы должны увеличить критическое значение  $Re$  в 2 раза.

<sup>3)</sup> Заметим, что при постоянной скорости движения тела относительно жидкости сила, действующая на тело, будет в соответствии с принципом относительности Галилея такая же, как и в случае движения жидкости с той же скоростью относительно неподвижного тела. Рис. 156 соответствует последнему случаю.

обозначим буквой  $R$  (рис. 156). Силу  $R$  можно разложить на две составляющие, одна из которых  $Q$  направлена в сторону, противоположную движению тела (или

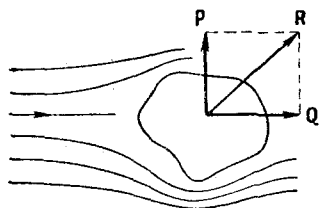


Рис. 156.

в сторону движения потока, набегающего на тело), а вторая  $P$  перпендикулярна к этому направлению. Составляющие  $Q$  и  $P$  называются соответственно лобовым сопротивлением и подъемной силой. Очевидно, что на тело, симметричное относительно направления движения,

может действовать только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае будет равна нулю.

Как показывают расчеты, в идеальной жидкости равномерное движение тел должно было бы происходить без лобового сопротивления. Не обладая вязкостью, идеальная жидкость должна свободно скользить по поверхности тела, полностью обтекая его. На рис. 157 показаны линии тока при обтекании очень длинного

(«бесконечного») цилиндра идеальной жидкостью. Вследствие полного обтекания картина линий тока оказывается совершенно симметричной как относительно прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , так и относительно прямой, проходящей через точки  $C$  и  $D$ . Поэтому давление вблизи точек  $A$  и  $B$  будет одинаково (и больше,

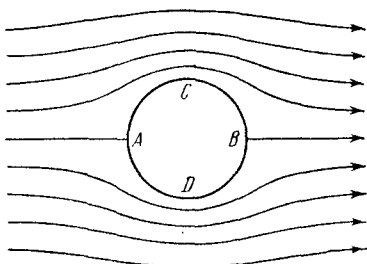


Рис. 157.

чем в невозмущенном потоке, так как скорость вблизи этих точек меньше); точно так же давление вблизи точек  $C$  и  $D$  тоже будет одинаково (и меньше, чем в невозмущенном потоке, так как скорость вблизи этих точек больше). Следовательно, результирующая сил давления на поверхность цилиндра (которая при отсутствии вязкости могла бы обусловить лобовое сопротивление), очевидно, будет равна нулю. Такой же результат получается и для тел другой формы.

Иначе протекают явления при движении тела в жидкости, обладающей вязкостью. В этом случае очень тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно целое, увлекая за собой из-за трения последующие слои. По мере удаления от поверхности тела скорость слоев становится все меньше и, наконец, на некотором расстоянии от поверхности жидкость оказывается практически невозмущенной движением тела. Таким образом, тело оказывается окруженным слоем жидкости, в котором имеется градиент скорости. Этот слой называется пограничным. В нем действуют силы трения, которые в конечном итоге оказываются приложенными к телу и приводят к возникновению лобового сопротивления. Но дело не исчерпывается только этим. Наличие пограничного слоя в корне изменяет характер обтекания тела жидкостью. Полное обтекание становится невозможным. Действие сил трения в поверхностном слое приводит к тому, что поток отрывается от поверхности тела, в результате

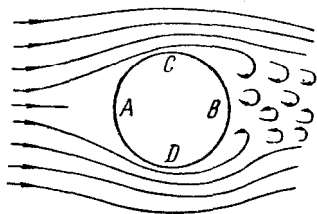


Рис. 158.

чего позади тела возникают вихри (см. рис. 158, на котором показано обтекание цилиндра вязкой жидкостью). Вихри уносятся потоком и постепенно затухают вследствие трения; при этом энергия вихрей расходуется на нагревание жидкости. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным, поэтому результирующая сил давления будет отлична от нуля, в свою очередь обуславливая лобовое сопротивление.

Таким образом, лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. При данных поперечных размерах тела сопротивление давления сильно зависит от формы тела. По этой причине его называют также сопротивлением формы. Наименьшим сопротивлением давления обладают тела хорошо обтекаемой каплевидной формы (рис. 159). Такую форму стремятся придать фюзеляжу и крыльям самолетов; кузову автомобилей и т. п.

Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется значением числа

Рейнольдса (59.3). В данном случае  $l$  — некоторый характерный размер тела (например, радиус для тела шаровой формы),  $v$  — скорость тела относительно жидкости.

При малых  $Re$  основную роль играет сопротивление трения, так что сопротивление давления можно не принимать во внимание. При увеличении  $Re$  роль сопротивления давления все больше растет. При больших значениях  $Re$  в лобовом сопротивлении преобладают силы давления.

Определяя характер сил, действующих на тело в потоке, число Рейнольдса может служить критерием подобия явлений и в этом случае.

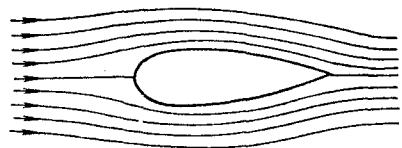


Рис. 159.

Это обстоятельство используется при моделировании. Например, модель самолета будет вести себя в потоке газа таким же образом, как и ее прообраз, если

кроме геометрического подобия модели и самолета будет соблюдено также равенство для них чисел Рейнольдса.

**Закон Стокса.** При малых  $Re$ , т. е. при небольших скоростях движения [и небольших  $l$ ; см. (59.3)], сопротивление среды обусловлено практически только силами трения. Согласно закону, установленному Стоксом, сила сопротивления в этом случае пропорциональна коэффициенту динамической вязкости  $\eta$ , скорости  $v$  движения тела относительно жидкости и характерному размеру тела  $l$ :  $f \sim \eta lv$  (предполагается, что расстояние от тела до границ жидкости, например до стенок сосуда, значительно больше размеров тела). Коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Для шара, если в качестве  $l$  взять радиус шара  $r$ , коэффициент пропорциональности оказывается равным  $6\pi$ . Следовательно, сила сопротивления движению шарика в жидкостях при небольших скоростях в соответствии с законом Стокса равна

$$f = 6\pi\eta r v. \quad (60.1)$$

На небольшой шарик, падающий вертикально в жидкости или газе, будут действовать три силы: 1) сила



тяжести  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$  ( $r$  — радиус шарика,  $\rho$  — его плотность), направленная вниз, 2) выталкивающая сила  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g$  ( $\rho_0$  — плотность жидкости или газа), направленная вверх, и 3) сила сопротивления  $6\pi\eta r v$ , направленная в сторону, противоположную направлению движения, т. е. вверх. Первые две силы по величине постоянны, третья пропорциональна скорости  $v$ . Поэтому по достижении некоторой определенной скорости  $v_0$  выталкивающая сила и сила сопротивления в сумме уравновешивают силу тяжести, вследствие чего шарик начинает двигаться без ускорения, т. е. равномерно. Скорость  $v_0$  равномерного движения легко найти из следующего условия:

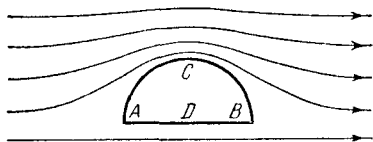


Рис. 160.

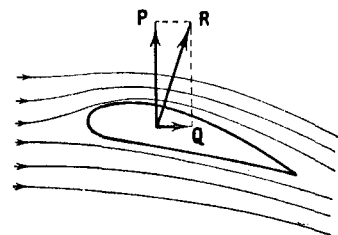


Рис. 161.

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_0.$$

Решая это уравнение относительно  $v_0$ , получим:

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0) g r^2}{9\eta}. \quad (60.2)$$

Как видно из (60.2), скорость равномерного падения шарика в вязкой среде пропорциональна квадрату его радиуса. По причинам, выясненным выше, формула (60.2) годна только для малых шариков.

Измерив скорость установившегося (равномерного) падения маленьких шариков в жидкости, можно по формуле (60.2) найти вязкость жидкости  $\eta$ . Этим методом определения вязкости иногда пользуются на практике.

**Подъемная сила.** Для возникновения подъемной силы вязкость жидкости не имеет существенного значения. На рис. 160 показаны линии тока при обтекании идеальной жидкостью полуцилиндра. Вследствие полного обтекания линии тока будут симметричны относительно прямой  $CD$ . Однако относительно прямой  $AB$  картина будет

несимметричной. Линии тока сгущаются вблизи точки *C*, поэтому давление здесь будет меньше, чем вблизи точки *D*, и возникает подъемная сила **P**. Аналогичным образом возникает подъемная сила и в вязкой жидкости.

Силой, поддерживающей самолет в воздухе, служит подъемная сила, действующая на его крылья. Лобовое сопротивление играет при полете самолета вредную роль. Поэтому крыльям самолета и его фюзеляжу придают хорошо обтекаемую форму. Профиль крыла должен вместе с тем обеспечивать достаточную по величине подъемную силу. Оптимальным для крыла является показанный на рис. 161 профиль, найденный великим русским ученым Н. Е. Жуковским (1847—1921). Трудami Жуковского и его ученика С. А. Чаплыгина было положено начало современной аэродинамике. В. И. Ленин назвал Жуковского отцом русской авиации. Жуковский, в частности, вывел формулу для определения подъемной силы, являющуюся основой всех аэродинамических расчетов самолетов.

## ЧАСТЬ 2

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

---

### ГЛАВА IX

## КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

### § 61. Общие сведения о колебаниях

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. п.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т. д. В данной главе рассматриваются механические колебания.

Колебания широко распространены в природе и технике. Во многих случаях они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, вибрации крыльев самолета — все это процессы, которые могут привести к катастрофическим последствиям. В подобных случаях задача заключается в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или во всяком случае воспрепятствовать тому, чтобы колебания достигли опасных размеров.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в самой основе различных отраслей техники. Так, например, на колебательных процессах основана вся радиотехника.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными или собственными называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник). Для того чтобы вызвать колебания, можно либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примером могут служить колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой — система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в те моменты, когда маятник проходит через среднее положение.

При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Простейшими являются гармонические колебания, т. е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам: во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим, и, во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

## § 62. Гармонические колебания

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массы  $m$ , подвешенного на пружине (рис. 162). В состоянии равновесия сила  $mg$  уравнивается упругой силой  $k\Delta l_0$ :

$$mg = k\Delta l_0. \quad (62.1)$$

Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой  $x$ , причем ось  $x$  направим по вертикали вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика.

Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние, равное  $x$  ( $x$  — алгебраическая величина), то удлинение пружины станет равным  $\Delta l_0 + x$  и проекция результирующей силы на ось  $x$  (обозначим эту проекцию просто буквой  $f$ ) примет значение

$$f = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Учитывая условие равновесия (62.1), получим, что

$$f = -kx. \quad (62.2)$$

Знак «—» в формуле (62.2) отражает то обстоятельство, что смещение и сила имеют противоположные направления: если шарик смещен из положения равновесия вниз ( $x > 0$ ), сила направлена вверх ( $f < 0$ ), при смещении шарика вверх ( $x < 0$ ) сила направлена вниз ( $f > 0$ ). Таким образом, сила  $f$  обладает следующими свойствами: 1) она пропорциональна смещению шарика из положения равновесия, 2) она всегда направлена к положению равновесия.

В рассмотренном нами примере сила (62.2), в сущности, по своей природе упругая. Может случиться, что сила иного происхождения обнаруживает такую же закономерность, т. е. оказывается равной  $-kx$ , где  $k$  — постоянная положительная величина. Силы такого вида, независимо от их природы, принято называть квазиупругими.

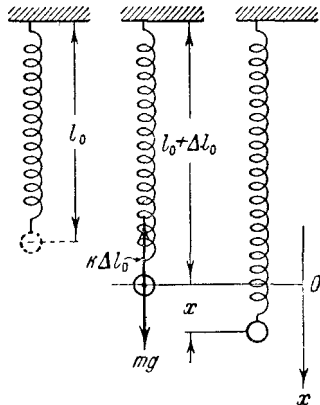


Рис. 162.

Для того чтобы сообщить системе смещение  $x$ , нужно совершить против квазиупругой силы работу

$$A = \int_0^x (-f) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Эта работа идет на создание запаса потенциальной энергии системы. Следовательно, система, в которой действует квазиупругая сила, при смещении из положения равновесия на расстояние  $x$  обладает потенциальной энергией<sup>1)</sup>

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \quad (62.3)$$

(потенциальную энергию в положении равновесия полагаем равной нулю).

Выражение (62.3) совпадает с выражением (27.13) для потенциальной энергии деформированной пружины.

Обратимся снова к системе, изображенной на рис. 162. Сообщим шарiku смещение  $x = a$ , после чего предоставим систему самой себе.

Под действием силы  $f = -kx$  шарик будет двигаться к положению равновесия со все возрастающей скоростью  $v = \dot{x}$ . При этом потенциальная энергия системы будет убывать (рис. 163), но зато появится все возрастающая кинетическая энергия  $E_k = m\dot{x}^2/2$  (массой пружины пренебрегаем). Придя в положение равновесия, шарик продолжает

двигаться по инерции. Это движение будет замедленным и прекратится тогда, когда кинетическая энергия полностью превратится в потенциальную, т. е. когда смещение шарика станет равным  $-a$ . Затем такой же процесс будет протекать при движении шарика в обрат-

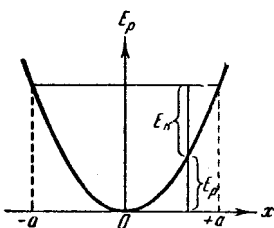


Рис. 163.

<sup>1)</sup> Мы вынуждены отказаться от обозначений кинетической и потенциальной энергии, которыми пользовались в механике. В учении о колебаниях буквой  $T$  принято обозначать период колебаний. Буквой  $U$  в молекулярной физике обозначают внутреннюю энергию тела. Поэтому мы будем в дальнейшем обозначать кинетическую энергию символом  $E_k$ , а потенциальную — символом  $E_p$ .

ном направлении. Если трение в системе отсутствует, энергия системы должна сохраняться и шарик будет двигаться в пределах от  $x = a$  до  $x = -a$  неограниченно долго.

Уравнение второго закона Ньютона для шарика имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (62.4)$$

Коэффициент при  $x$  положителен. Поэтому его можно представить в виде

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (62.5)$$

где  $\omega_0$  — вещественная величина.

Применяя в (62.4) обозначение (62.5), получим:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (62.6)$$

Таким образом, движение шарика под действием силы вида (62.2) описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Легко убедиться подстановкой, что общее решение уравнения (62.2) имеет вид

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)^1), \quad (62.7)$$

где  $a$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные.

Итак, смещение  $x$  изменяется со временем по закону косинуса. Следовательно, движение системы, находящейся под действием силы вида  $f = -kx$ , представляет собой гармоническое колебание.

График гармонического колебания, т. е. график функции (62.7), показан на рис. 164. По горизонтальной оси отложено время  $t$ , по вертикальной оси — смещение  $x$ . Поскольку косинус изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$ , значения  $x$  лежат в пределах от  $-a$  до  $+a$ .

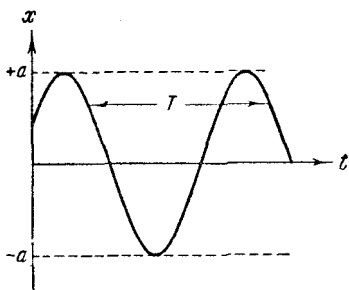


Рис. 164.

<sup>1)</sup> Или  $x = a \sin(\omega_0 t + \alpha')$ , где  $\alpha' = \alpha + \pi/2$ .

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебания. Амплитуда  $a$  — постоянная положительная величина. Ее значение определяется величиной первоначального отклонения или толчка, которым система была выведена из положения равновесия.

Величина  $(\omega_0 t + \alpha)$ , стоящая под знаком косинуса, называется фазой колебания. Постоянная  $\alpha$  представляет собой значение фазы в момент времени  $t = 0$  и называется начальной фазой колебания. С изменением начала отсчета времени будет изменяться и  $\alpha$ . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значение  $x$  не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа  $2\pi$ , всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше  $\pi$ . Поэтому обычно рассматриваются только значения  $\alpha$ , лежащие в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

Поскольку косинус — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , различные состояния<sup>1)</sup> системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени  $T$ , за который фаза колебания получает приращение, равное  $2\pi$  (рис. 163). Этот промежуток времени  $T$  называется периодом колебания. Он может быть определен из следующего условия:  $[\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$ , откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (62.8)$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебания  $\nu$ . Очевидно, что частота  $\nu$  связана с продолжительностью одного колебания  $T$  следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (62.9)$$

За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 сек. Эту единицу называют герцем (*гц*). Частота в  $10^3$  *гц* называется килогерцем (*кгц*), в  $10^6$  *гц* — мегагерцем (*Мгц*).

<sup>1)</sup> Напомним, что состояние механической системы характеризуется значениями координат и скоростей тел, образующих систему.



Из (62.8) следует, что

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (62.10)$$

Таким образом,  $\omega_0$  дает число колебаний за  $2\pi$  секунд. Величину  $\omega_0$  называют круговой или циклической частотой. Она связана с обычной частотой  $\nu$  соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (62.11)$$

Продифференцировав (62.7) по времени, получим выражение для скорости

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (62.12)$$

Как видно из (62.12), скорость также изменяется по гармоническому закону, причем амплитуда скорости равна  $a\omega_0$ . Из сравнения (62.7) и (62.12) следует, что скорость опережает смещение по фазе на  $\pi/2$ .

Продифференцировав (62.12) еще раз по времени, найдем выражение для ускорения

$$\begin{aligned} \omega = \ddot{x} &= -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \end{aligned} \quad (62.13)$$

Как следует из (62.13), ускорение и смещение находятся в противофазе. Это означает, что в тот момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего отрицательного значения, и наоборот.

На рис. 165 сопоставлены графики для смещения, скорости и ускорения.

Каждое конкретное колебание характеризуется определенными значениями амплитуды  $a$  и начальной фазы  $\alpha$ . Значения этих величин для данного колебания могут быть определены из так называемых начальных условий, т. е. по значениям отклонения  $x_0$  и скорости  $v_0$

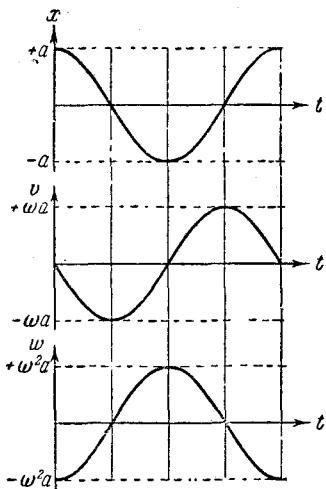


Рис. 165.

в начальный момент времени. Действительно, положив в (62.7) и (62.12)  $t = 0$ , получим два уравнения:

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad v_0 = -a\omega_0 \sin \alpha,$$

из которых находим, что

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad (62.14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (62.15)$$

Уравнение (62.15) удовлетворяется двумя значениями  $\alpha$ , лежащими в интервале от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Из этих значений нужно взять то, при котором получаются правильные знаки у косинуса и синуса.

### § 63. Энергия гармонического колебания

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. В процессе колебаний, как мы выяснили выше, происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения из положения равновесия полная энергия  $E$  состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения  $E_{p \max}$ :

$$E = E_{p \max} = \frac{ka^2}{2}, \quad (63.1)$$

при прохождении же системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения  $E_{k \max}$ :

$$E = E_{k \max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \quad (63.2)$$

(выше было показано, что амплитуда скорости равна  $a\omega_0$ ). Легко видеть, что выражения (63.1) и (63.2) равны друг другу, так как согласно (62.5)  $m\omega_0^2 = k$ .

Выясним, как изменяется со временем кинетическая  $E_k$  и потенциальная  $E_p$  энергия гармонического колеба-

ния. Кинетическая энергия равна [см. выражение (62.12) для  $\dot{x}$ ]

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (63.3)$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (63.4)$$

Складывая (63.3) и (63.4), с учетом соотношения (62.5), получим:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2} \left( \text{или } \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \right), \quad (63.5)$$

что совпадает с (63.1) и (63.2). Таким образом, полная энергия гармонического колебания действительно оказывается постоянной.

Используя известные формулы тригонометрии, выражениям для  $E_k$  и  $E_p$  можно придать вид

$$\begin{aligned} E_k &= E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= E \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \end{aligned} \quad (63.6)$$

$$\begin{aligned} E_p &= E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= E \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \end{aligned} \quad (63.7)$$

где  $E$  — полная энергия системы. Из формул (63.6) и (63.7) видно, что  $E_k$  и  $E_p$  изменяются с частотой  $2\omega_0$ , т. е. с частотой, в 2 раза превышающей частоту гармонического колебания.

На рис. 166 сопоставлены графики для  $x$ ,  $E_k$  и  $E_p$ . Среднее значение квадрата синуса и квадрата косинуса равно, как известно, половине. Следовательно, среднее значение  $E_k$  совпадает со средним значением  $E_p$  и равно  $E/2$ .

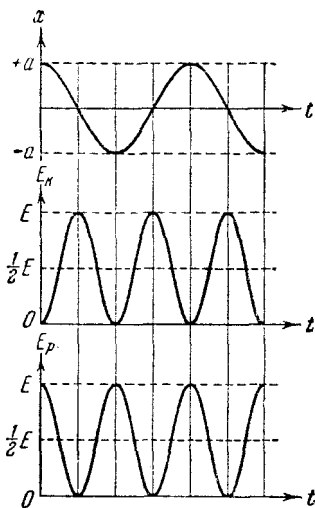


Рис. 166.

## § 64. Гармонический осциллятор

Систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (64.1)$$

где  $\omega_0^2$  — постоянная положительная величина [см. (62.6)], называют гармоническим осциллятором (или гармоническим вибратором). Как мы уже знаем, решение уравнения (64.1) имеет вид:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (64.2)$$

Следовательно, гармонический осциллятор представляет собой систему, которая совершает гармонические колебания около положения равновесия.

Все результаты, полученные в предыдущих параграфах для гармонического колебания, справедливы, разумеется, и для гармонического осциллятора. Рассмотрим дополнительно еще два вопроса.

Найдем импульс гармонического осциллятора. Продифференцировав (64.2) по времени и умножив полученный результат на массу осциллятора  $m$ , получим

$$p = m\dot{x} = -m a \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (64.3)$$

В каждом положении, характеризуемом отклонением  $x$ , осциллятор имеет некоторое значение импульса  $p$ . Чтобы найти  $p$  как функцию  $x$ , нужно исключить время  $t$  из уравнений (64.2) и (64.3). Для этого представим указанные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos(\omega_0 t + \alpha), \\ \frac{p}{m a \omega_0} &= -\sin(\omega_0 t + \alpha). \end{aligned}$$

Возведя эти выражения в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1. \quad (64.4)$$

На рис. 167 изображен график, показывающий зависимость импульса  $p$  гармонического осциллятора от отклонения  $x$ . Координатную плоскость  $p, x$  принято называть фазовой плоскостью, а соответствующий

график — фазовой траекторией. В соответствии с (64.4) фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс с полуосями  $a$  и  $ma\omega_0$ . Каждая точка фазовой траектории изображает отклонение  $x$  и импульс  $p$ , т. е. состояние осциллятора для некоторого момента времени. С течением времени точка, изображающая состояние (ее называют кратко изобразительной точкой), перемещается по фазовой траектории, совершая за период колебания полный обход. Легко убедиться в том, что перемещение изобразительной точки совершается по часовой стрелке. В самом деле, возьмем такой момент времени  $t'$ , что  $\omega_0 t' + \alpha = 2\pi n$  ( $n$  — целое число). Этому моменту времени соответствует  $x = a$  и  $p = 0$  (см. точку  $I$  на рис. 167). В последующие моменты времени  $x$  будет убывать, а  $p$  принимает все возрастающие по модулю отрицательные значения. Следовательно, изобразительная точка движется так, как показано стрелкой на рис. 167, т. е. по часовой стрелке.

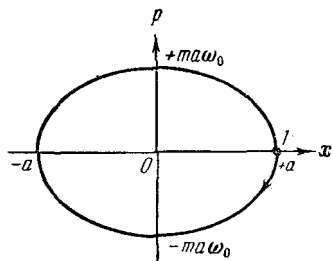


Рис. 167.

Найдем площадь эллипса. Как известно, она равна произведению полуосей эллипса, умноженному на  $\pi$ :

$$S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{m a^2 \omega_0^2}{2}.$$

В соответствии с (63.5)  $ma^2\omega_0^2/2$  есть полная энергия осциллятора; величина  $2\pi/\omega_0$  равна  $1/\nu_0$ , где  $\nu_0$  — собственная частота осциллятора, являющаяся для данного осциллятора величиной постоянной. Следовательно, площадь эллипса может быть представлена в виде

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

откуда

$$E = \nu_0 S. \quad (64.5)$$

Таким образом, полная энергия гармонического осциллятора пропорциональна площади эллипса, причем коэффициентом пропорциональности служит собственная частота осциллятора.

Площадь эллипса может быть вычислена как интеграл  $\oint p dx$ . Поэтому формуле (64.5) можно придать следующий вид:

$$E = v_0 \oint p dx.$$

Последнее соотношение сыграло большую роль при создании основ квантовой механики.

Теперь рассмотрим вопрос о вероятности, с которой осциллятор может быть обнаружен в различных положениях. Скорость осциллятора достигает наибольшего значения в те моменты, когда он проходит через положение равновесия. В моменты же наибольшего отклонения от положения равновесия скорость обращается в нуль. Отсюда следует, что вероятность обнаружить осциллятор вблизи одного из крайних положений будет больше, чем вероятность обнаружить его вблизи положения равновесия. Это поясняется рис. 168, на котором изо-

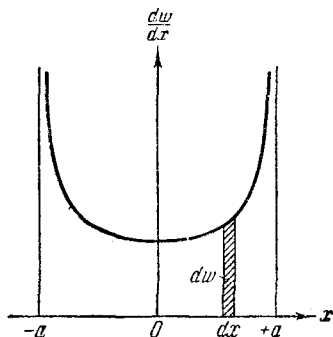


Рис. 168.

бражена кривая, определяющая так называемую плотность вероятности  $\frac{dw}{dx}$  <sup>1)</sup>. Для того чтобы найти вероятность  $dw$  нахождения осциллятора в пределах данного  $dx$ , нужно ординату кривой в соответствующем месте умножить на  $dx$ . Например, площадь заштрихованной полоски на рис. 168 численно равна вероятности  $dw$  того, что осциллятор будет обнаружен в пределах данного интервала  $dx$ . Вся площадь под кривой плотности вероятности дает вероятность того, что осциллятор будет обнаружен в одном из положений в пределах от  $-a$  до  $+a$ , и, следовательно, как вероятность

<sup>1)</sup> Эта кривая описывается уравнением

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

всякого достоверного события, должна быть равна единице.

Отметим, что квантовая механика дает для вероятности различных положений гармонического осциллятора существенно отличный результат.

### § 65. Малые колебания системы вблизи положения равновесия

Рассмотрим произвольную механическую систему, положение которой может быть задано с помощью одной величины, которую мы обозначим через  $x$ . В таких случаях говорят, что система имеет одну степень свободы. Величиной  $x$ , определяющей положение системы, может быть угол, отсчитываемый от некоторой плоскости, или расстояние, отсчитываемое вдоль заданной кривой, в частности прямой, линии и т. п. Потенциальная энергия системы будет функцией одной переменной  $x$ :  $E_p = E_p(x)$ . Выберем начало отсчета  $x$  таким образом, чтобы в положении равновесия системы  $x$  был равен нулю. Тогда функция  $E_p(x)$  будет иметь минимум при  $x = 0$ . Разложим  $E_p(x)$  в ряд по степеням  $x$ , причем ограничимся рассмотрением малых колебаний, так что высшими степенями  $x$  можно будет пренебречь. По формуле Маклорена

$$E_p(x) = E_p(0) + E_p'(0)x + \frac{1}{2}E_p''(0)x^2$$

(ввиду малости  $x$  остальными членами пренебрегаем).

Поскольку  $E_p(x)$  при  $x = 0$  имеет минимум,  $E_p'(0)$  равна нулю, а  $E_p''(0)$  положительна. Введем обозначения:  $E_p(0) = b$ ,  $E_p''(0) = k$  ( $k > 0$ ). Тогда

$$E_p(x) = b + \frac{1}{2}kx^2. \quad (65.1)$$

Выражение (65.1) идентично с выражением (62.3) для потенциальной энергии системы, в которой действует квазиупругая сила (константу  $b$  можно положить равной нулю).

Используя соотношение (28.5), можно найти силу, действующую на систему:

$$f = f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -kx.$$

Итак, потенциальная энергия системы при малых отклонениях от положения равновесия оказывается квадратичной функцией смещения, а сила, действующая на систему, имеет вид квазиупругой силы. Следовательно, при малых отклонениях от положения равновесия любая механическая система будет совершать колебания, близкие к гармоническим.

## § 66. Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нитке.

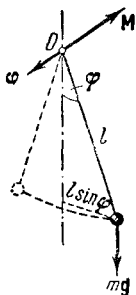


Рис. 169.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\varphi$ , образованным нитью с вертикалью (рис. 169). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент  $M$ , равный по величине  $mgl \sin \varphi$  ( $m$  — масса, а  $l$  — длина маятника). Он имеет такое направление, что стремится

вернуть маятник в положение равновесия, и аналогичен в этом отношении квазиупругой силе. Поэтому так же, как смещению и квазиупругой силе, моменту  $M$  и угловому смещению  $\varphi$  нужно приписывать противоположные знаки<sup>1)</sup>. Следовательно, выражение для вращательного момента имеет вид

$$M = - mgl \sin \varphi. \quad (66.1)$$

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через  $\ddot{\varphi}$  и учитывая, что момент инерции маятника равен  $ml^2$ , получаем:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = - mgl \sin \varphi.$$

<sup>1)</sup> Рассматривая  $\varphi$  как вектор, связанный с направлением поворота правилом правого винта (это допустимо при малых  $\varphi$ ), противоположность знаков при  $M$  и  $\varphi$  можно объяснить тем, что векторы  $M$  и  $\varphi$  направлены в противоположные стороны (рис. 169).



Последнее уравнение можно привести к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (66.2)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Введя, кроме того, обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad (66.3)$$

мы приходим к следующему уравнению:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (66.4)$$

которое идентично с уравнением (62.6) для шарика, подвешенного на пружине. Его решение имеет вид

$$\varphi = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (66.5)$$

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

Как следует из (66.3), частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и от ускорения силы тяжести и не зависит от массы маятника. По формуле (62.8) с учетом (66.3) получается известное из школьного курса выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (66.6)$$

Отметим, что, решив уравнение (66.2), можно найти для периода колебаний следующую формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right\},$$

где  $a$  — амплитуда колебаний, т. е. наибольший угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия.

## § 67. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции. В положении равновесия центр инерции маятника  $C$  находится под

точкой подвеса маятника  $O$ , на одной с ней вертикали (рис. 170). При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (67.1)$$

где  $m$  — масса маятника, а  $l$  — расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника. Знак «—» имеет то же значение, что и в случае формулы (66.1).

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой  $I$ , можно написать:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (67.2)$$

В случае малых колебаний (67.2) переходит в уже известное нам уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (67.3)$$

Через  $\omega_0^2$  обозначена в данном случае следующая величина:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (67.4)$$

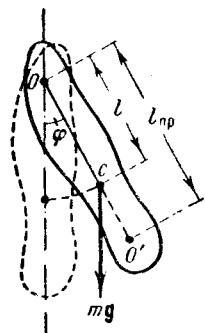


Рис. 170.

Из уравнений (67.3) и (67.4) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника. В соответствии с (67.4) период колебания физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (67.5)$$

Из сопоставления формул (66.6) и (67.5) получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml} \quad (67.6)$$

будет иметь такой период колебаний, как и данный физический маятник. Величину (67.6) называют приве-

денной длиной физического маятника. Таким образом, приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника (см. точку  $O'$  на рис. 170).

По теореме Штейнера момент инерции маятника  $I$  может быть представлен в виде

$$I = I_0 + ml^2, \quad (67.7)$$

где  $I_0$  — момент инерции относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр инерции маятника. Подставив (67.7) в формулу (67.6), получаем:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} + l. \quad (67.8)$$

Из (67.8) следует, что приведенная длина всегда больше  $l$ , так что точка подвеса и центр качания лежат по разные стороны от центра инерции.

Подвесим маятник в точке, совпадающей с центром качания  $O'$ . В соответствии с (67.8) приведенная длина в этом случае будет равна

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml'} + l', \quad (67.9)$$

где  $l'$  — расстояние между первоначальным центром качания и центром инерции маятника. Учитывая, что  $l' = l_{\text{пр}} - l$ , выражение (67.9) можно записать следующим образом:

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_0}{m(l_{\text{пр}} - l)} + l_{\text{пр}} - l = l_{\text{пр}} + \frac{1}{m(l_{\text{пр}} - l)} [(I_0 + ml^2) - mll_{\text{пр}}].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Действительно,  $I_0 + ml^2$  равно  $I$  — моменту инерции относительно первоначальной оси вращения; этой же величине в соответствии с (67.6) равно выражение  $mll_{\text{пр}}$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что при подвешивании маятника в центре качания приведенная длина, а значит, и период колебаний будут теми же, что и вначале. Следовательно, точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки

подвеса в центр качания прежняя точка подвеса, становится новым центром качания.

На установленном нами свойстве взаимности основано определение ускорения силы тяжести с помощью так называемого обратного маятника. Обратным называется такой маятник, у которого имеются две параллельные друг другу, закрепленные вблизи его концов опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем тяжелые грузы. Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно  $l_{пр}$ . Измерив период колебаний маятника и зная  $l_{пр}$ , можно по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}$$

найти ускорение силы тяжести  $g$ .

## § 68. Графическое изображение гармонических колебаний. Векторная диаграмма

Решение ряда вопросов, в частности, сложение нескольких колебаний одного и того же направления, значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется векторной диаграммой.

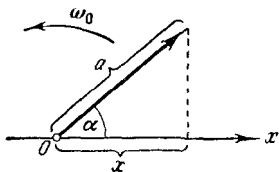


Рис. 171.

Возьмем ось, которую обозначим буквой  $x$  (рис. 171). Из точки  $O$ , взятой на оси, отложим вектор длины  $a$ , образующий с осью угол  $\alpha$ . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  в пределах от  $-a$  до  $+a$ , причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, рав-

ной длине вектора, круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.

Из сказанного следует, что гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью  $x$  угол, равный начальной фазе колебания.

## § 69. Сложение колебаний одинакового направления

Возможны случаи, когда тело участвует одновременно в нескольких колебаниях, происходящих вдоль одного и того же или вдоль различных направлений. Если, например, подвесить шарик на пружине к потолку вагона, качающегося на рессорах, то движение шарика относительно поверхности Земли будет складываться из колебаний вагона относительно Земли и колебаний шарика относительно вагона.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение  $x$  колеблющегося тела будет суммой смещений  $x_1$  и  $x_2$ , которые запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (69.1)$$

Представим оба колебания с помощью векторов  $a_1$  и  $a_2$  (рис. 172). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор  $a$ . Легко видеть, что проекция этого вектора на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор  $a$  представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же

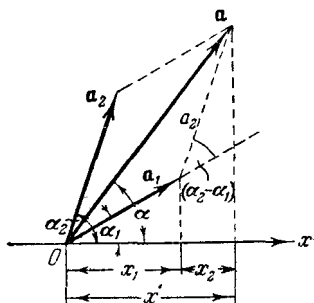


Рис. 172.

угловой скоростью  $\omega_0$ , как и векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $a$  и начальной фазой  $\alpha$ . Из построения видно, что

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (69.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (69.3)$$

Итак, представление гармонических колебаний посредством векторов дает возможность свести сложение нескольких колебаний к операции сложения векторов. Этот прием бывает особенно полезен, например, в оптике, где световые колебания в некоторой точке определяются как результат наложения многих колебаний, приходящих в данную точку от различных участков волнового фронта.

Формулы (69.2) и (69.3) можно, конечно, получить, сложив выражения (69.1) и произведя соответствующие тригонометрические преобразования. Но примененный нами способ получения этих формул отличается большей простотой и наглядностью.

Проанализируем выражение (69.2) для амплитуды. Если разность фаз обоих колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1$  равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме  $a_1$  и  $a_2$ . Если разность фаз  $\alpha_2 - \alpha_1$  равна  $+\pi$  или  $-\pi$ , т. е. оба колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна  $|a_1 - a_2|$ .

Если частоты колебаний  $x_1$  и  $x_2$  неодинаковы, векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор  $\mathbf{a}$  пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Следовательно, результирующим движением будет в этом случае не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс.

## § 70. Биения

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Как мы сейчас покажем, результирующее движение при этих условиях

можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биениями.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой  $\omega$ , частоту второго колебания через  $\omega + \Delta\omega$ . По условию  $\Delta\omega \ll \omega$ . Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными  $a$ . Поскольку частоты колебаний несколько отличны, всегда можно выбрать начало отсчета времени так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю. Практически это означает,

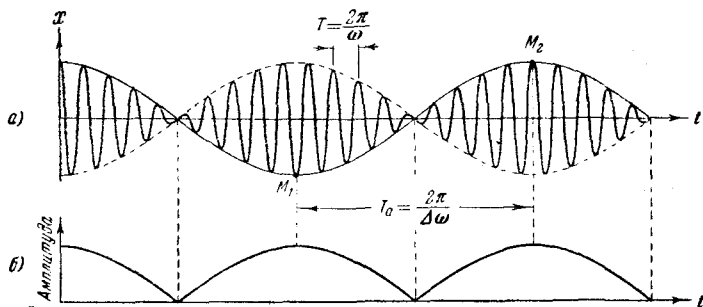


Рис. 173.

что мы должны дождаться, пока смещения в обоих колебаниях достигнут одновременно наибольшего положительного значения, и в этот момент «запустить секундомер». Тогда уравнения обоих колебаний будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t, \\ x_2 &= a \cos (\omega + \Delta\omega) t. \end{aligned}$$

Складывая эти два выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем:

$$x = x_1 + x_2 = \left( 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (70.1)$$

(во втором множителе пренебрегаем членом  $\Delta\omega/2$  по сравнению с  $\omega$ ).

График функции (70.1) изображен на рис. 173, а. График построен для  $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$ .

Заклученный в скобки множитель в формуле (70.1) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель.

Ввиду условия  $\Delta\omega \ll \omega$  за то время, за которое множитель  $\cos \omega t$  совершает несколько полных колебаний, множитель, стоящий в скобках, почти не изменится. Это дает нам основание рассматривать колебание (70.1) как гармоническое колебание частоты  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, так как он изменяется в пределах от  $-2a$  до  $+2a$ , в то время как амплитуда по определению — положительная величина. График амплитуды показан на рис. 173, б. Аналитическое выражение амплитуды, очевидно, имеет вид:

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (70.2)$$

Функция (70.2) — периодическая функция с частотой, в 2 раза превышающей частоту выражения, стоящего

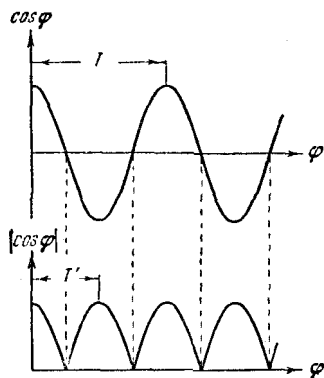


Рис. 174.

го под знаком модуля (см. рис. 174, на котором сопоставлены графики косинуса и его модуля), т. е. с частотой  $\Delta\omega$ . Таким образом, частота пульсаций амплитуды — ее называют частотой биений — равна разности частот складываемых колебаний.

Отметим, что множитель  $2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$  не только определяет амплитуду, но и влияет на фазу колебания. Это проявляется, например, в том, что отклонения, соответствующие соседним максимумам амплитуды, имеют противоположные знаки (см. точки  $M_1$  и  $M_2$  на рис. 173, а).

## § 71. Сложение взаимноперпендикулярных колебаний

Рассмотрим систему, обладающую двумя степенями свободы, т. е. такую систему, для задания положения которой необходимы две величины. Примером может служить тяжелый шарик, подвешенный на легкой длинной пружине, конец которой закреплен на шарнире так,



что шарик вместе с пружиной может совершать маятникообразные колебания в одной плоскости. Положение шарика можно определить, задав угол  $\varphi$ , образуемый осью пружины с вертикалью, и расстояние  $l$  от оси шарнира до центра шарика. Шарик может участвовать в двух колебаниях: во-первых, в колебаниях, при которых изменяется угол  $\varphi$ , во-вторых, в колебаниях, при которых изменяется расстояние  $l$ . Частота первого колебания определяется длиной пружины  $l$  и ускорением силы тяжести  $g$ , частота второго — коэффициентом упругости пружины  $k$  и массой шарика  $m$ . Если возбудить одновременно оба колебания, то шарик, вообще говоря, будет двигаться по некоторой сложной траектории (рис. 175), форма которой зависит от соотношения частот и начальных фаз обоих колебаний.

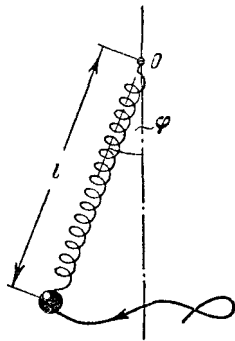


Рис. 175.

В качестве второго примера рассмотрим тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити (математический маятник)<sup>1)</sup>. Этот шарик может совершать два колебания во взаимно перпендикулярных направлениях, причем частоты обоих колебаний точно совпадают (обе частоты определяются длиной маятника  $l$  и ускорением силы тяжести  $g$ ). В этом случае шарик, вообще говоря, движется по некоторой криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Перейдем к сложению двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной и той же частоты  $\omega$ , совершающихся вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ . Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos (\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (71.1)$$

где  $\alpha$  — разность фаз обоих колебаний.

<sup>1)</sup> В § 66 мы предполагали, что такой маятник совершает колебания в заданной плоскости, вследствие чего его можно было рассматривать как систему с одной степенью свободы.

Выражения (71.1) представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (71.1) параметр  $t$ . Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (71.2)$$

Следовательно,

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (71.3)$$

Теперь развернем косинус во втором из уравнений (71.1) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  их значения (71.2) и (71.3). В результате получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (71.4)$$

Как известно из аналитической геометрии, уравнение (71.4) есть уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей  $x$  и  $y$  произвольно. Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд  $a$  и  $b$  и разности фаз  $\alpha$ .

Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях.

1. Разность фаз  $\alpha$  равна нулю. В этом случае уравнение (71.4) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (71.5)$$

Колеблющаяся точка перемещается по этой прямой, причем расстояние ее от начала координат равно  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Подставляя сюда выражения (71.1) для  $x$

и  $y$  и учитывая, что  $\alpha = 0$ , получим закон, по которому  $r$  изменяется со временем:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t. \quad (71.6)$$

Из (71.6) следует, что результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой (71.5) с частотой  $\omega$  и амплитудой, равной  $\sqrt{a^2 + b^2}$  (рис. 176).

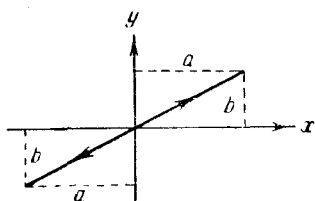


Рис. 176.

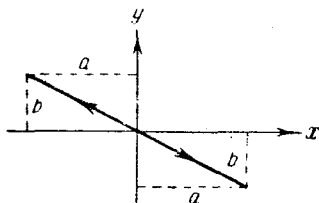


Рис. 177.

2. Разность фаз  $\alpha$  равна  $\pm\pi$ . Уравнение (71.4) имеет вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 177)

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

3. При  $\alpha = \pm\pi/2$  уравнение (71.4) переходит в

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (71.7)$$

т. е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд  $a$  и  $b$  эллипс вырождается в окружность.

Случаи  $\alpha = +\pi/2$  и  $\alpha = -\pi/2$  отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если  $\alpha = +\pi/2$ , уравнения (71.1) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= -b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (71.8)$$

В момент  $t = 0$  тело находится в точке  $1$  (рис. 178). В последующие моменты времени координата  $x$  уменьшается, а координата  $y$  становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке.

При  $\alpha = -\pi/2$  уравнения колебаний имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (71.9)$$

Отсюда можно заключить, что движение происходит против часовой стрелки.

Из сказанного следует, что равномерное движение по окружности радиуса  $R$  с угловой скоростью  $\omega$  может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

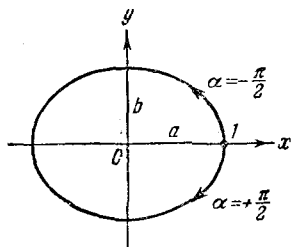


Рис. 178.

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t, \\ y &= \pm R \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (71.10)$$

(знак «+» в выражении для  $y$  соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» — движению по часовой стрелке).

В заключение отметим, что в случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину  $\Delta\omega$ , их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся разностью фаз. В самом деле, уравнения колебаний можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos [\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)], \end{aligned} \right\}$$

и выражение  $\Delta\omega t + \alpha$  рассматривать как разность фаз, медленно изменяющуюся со временем по линейному закону.

Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

## § 72. Фигуры Лиссажу

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых

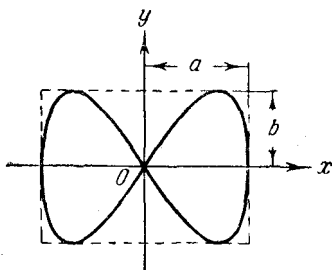


Рис. 179.

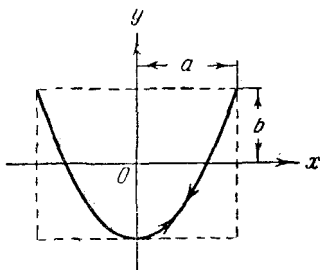


Рис. 180.

фигурами Лиссажу. На рис. 179 показана одна из простейших траекторий, получающаяся при отношении частот 1:2 и разности фаз  $\pi/2$ . Уравнения колебаний имеют вид

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

За то время, пока вдоль оси  $x$  точка успевает переместиться из одного крайнего положения в другое, вдоль оси  $y$ , выйдя из нулевого положения, она успевает достигнуть одного крайнего положения, затем другого и вернуться в нулевое положение.

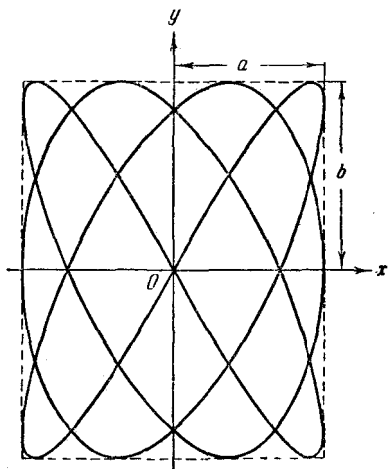


Рис. 181.

При отношении частот 1:2 и разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (рис. 180), по которой точка движется туда и обратно.

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу. На рис. 181 для примера показана кривая для отношения частот 3:4 и разности фаз  $\pi/2$ .

### § 73. Затухающие колебания

При выводе уравнения гармонических колебаний мы считали, что колеблющаяся точка находится под действием только квазиупругой силы. Во всякой реальной колебательной системе всегда имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания будут затухать.

Рассмотрим свободные (или собственные) затухающие колебания. Раз колебания свободные, значит, система, будучи выведена внешними силами из положения равновесия или получив за счет внешних сил первоначальный толчок, в дальнейшем предоставлена самой себе и находится под воздействием только квазиупругой силы и силы сопротивления среды. Ограничимся рассмотрением малых колебаний. Тогда и скорость системы будет малой, а при небольших скоростях сила сопротивления пропорциональна величине скорости:

$$f_r = -rv = -r\dot{x}, \quad (73.1)$$

где  $r$  — постоянная, называемая коэффициентом сопротивления. Знак «—» обусловлен тем, что  $f$  и  $v$  имеют противоположные направления.

Напишем для колеблющегося тела уравнение второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (73.2)$$

где применены обозначения:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad (73.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (73.4)$$

Заметим, что  $\omega_0$  представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы

при отсутствии сопротивления среды, т. е. при  $r = 0$ . Эту частоту называют собственной частотой колебаний системы.

В случае гармонического осциллятора размах колебаний, определяемый амплитудой  $a$ , остается постоянным. Наличие сопротивления среды приводит к тому, что размах колебаний уменьшается. Поэтому попробуем искать решение уравнения (73.2) в виде

$$x = a(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (73.5)$$

где  $a(t)$  — некоторая функция времени.

Продифференцировав (73.5) по  $t$ , найдем  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$ :

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(\omega t + \alpha) - a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = \ddot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

После подстановки этих выражений в уравнение (73.2) и несложных преобразований придем к следующему соотношению:

$$[\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a] \cos(\omega t + \alpha) - 2\omega[\dot{a} + \beta a] \sin(\omega t + \alpha) = 0.$$

Для того чтобы полученное нами уравнение удовлетворялось при любых значениях  $t$ , необходимо равенство нулю коэффициентов при  $\cos(\omega t + \alpha)$  и  $\sin(\omega t + \alpha)$ . Таким образом, мы приходим к двум уравнениям:

$$\dot{a} + \beta a = 0, \quad (73.6)$$

$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0. \quad (73.7)$$

Уравнение (73.6) можно представить в виде

$$\frac{da}{dt} = -\beta a, \quad \text{откуда} \quad \frac{da}{a} = -\beta dt.$$

Интегрирование последнего уравнения дает  $\ln a = -\beta t + \ln a_0$ , где через  $\ln a_0$  обозначена постоянная интегрирования. Наконец, произведя потенцирование найденного соотношения, получим для  $a(t)$  следующее выражение:

$$a = a_0 e^{-\beta t}. \quad (73.8)$$

Легко видеть, что  $\dot{a} = -\beta a$  и  $\ddot{a} = \beta^2 a$ . Подстановка этих значений в уравнение (73.7) приводит к соотношению

$$\beta^2 a - 2\beta^2 a + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0,$$

из которого после сокращения на отличный от нуля множитель  $a$  получается значение  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (73.9)$$

При условии, что  $\omega_0^2 > \beta^2$ , величина  $\omega$  будет вещественной, и решение дифференциального уравнения (73.2) может быть представлено в виде (73.5). Таким образом, при не слишком большом затухании (при  $\beta < \omega_0$ ) колебания описываются функцией

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (73.10)$$

График этой функции дан на рис. 182. Пунктирными линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки  $x$ .

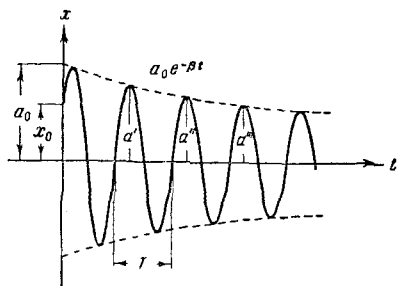


Рис. 182.

В соответствии с видом функции (73.10) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание частоты  $\omega$  с амплитудой, изменяющейся по закону (73.8). Верхняя из пунктирных кривых на рис. 182 дает график функции

$a(t)$ , причем величина  $a_0$  представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение  $x_0$  зависит, кроме  $a_0$ , также от начальной фазы  $\alpha$ :  $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$  (рис. 182).

Скорость затухания колебаний определяется величиной  $\beta = r/2m$ , которую называют коэффициентом затухания. Найдем время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз. По определению  $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$ , откуда  $\beta\tau = 1$ . Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Согласно формуле (73.9) период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (73.11)$$



При незначительном сопротивлении среды ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) период колебаний практически равен  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается.

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например,  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  и т. д. на рис. 182) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если  $a' = a_0 e^{-\beta t}$ , то  $a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T}$ ,  $a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$  и т. д. Вообще, отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм — логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \quad (73.12)$$

Последнюю величину обычно используют для характеристики затухания колебаний. Выразив  $\beta$  через  $\lambda$  и  $T$  в соответствии с (73.12), закон убывания амплитуды можно записать в виде

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}$$

За время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз, система успевает совершить  $N_e = \tau/T$  колебаний.

Из условия  $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$  получается, что  $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$ .

Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (73.13)$$

называемая добротностью колебательной системы. Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за

то время  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Найдем импульс системы, совершающей затухающие колебания. Продифференцировав функцию (73.10) по времени и умножив полученный результат на массу  $m$ , получим

$$p = m\dot{x} = -ma_0e^{-\beta t}[\beta \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

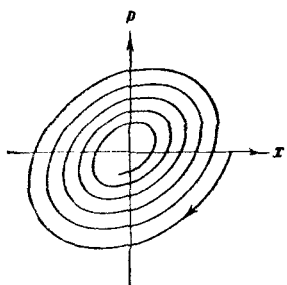


Рис. 183.

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$p = p_0e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi), \quad (73.14)$$

где  $p_0 = ma_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \approx ma_0\omega_0$ , а  $\psi$  удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Если бы не множитель  $e^{-\beta t}$ , то, исключив  $t$  из уравнений (73.10) и (73.14), подобно тому как это было осуществлено в § 71, мы получили бы в координатах  $x$  и  $p$  уравнение эллипса, повернутого по отношению к координатным осям. Наличие экспоненциального множителя  $e^{-\beta t}$  приводит к тому, что эллипс превращается в скручивающуюся спираль (рис. 183). Эта спираль и представляет собой фазовую траекторию затухающего колебания. Она будет наклонена по отношению к координатным осям тем сильнее, чем больше коэффициент затухания  $\beta$ .

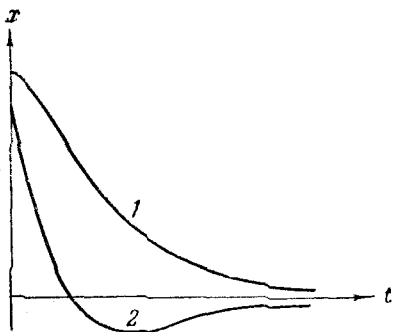


Рис. 184.

Из формулы (73.11) следует, что при  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$  период колебаний обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. Соответствующий математический анализ дает, что при  $\omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$  движение носит аперiodический (непериодический) харак-

тер — выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. На рис. 184 показано два возможных способа возвращения системы к положению равновесия при апериодическом движении. Каким из этих способов приходит система в положение равновесия, зависит от начальных условий. Движение, изображаемое кривой 2, получается в том случае, когда система начинает двигаться из положения, характеризуемого смещением  $x_0$ , к положению равновесия с начальной скоростью  $v_0$ , определяемой условием

$$|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}).$$

## § 74. Автоколебания

При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Пополнение энергии системы может осуществляться за счет толчков извне, однако эти толчки должны сообщаться системе в такт с ее колебаниями, в противном случае они могут ослабить колебания и даже прекратить их совсем. Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управля-

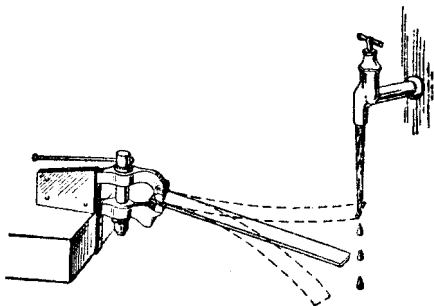


Рис. 185.

ла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется автоколебательной, а совершаемые ею незатухающие колебания — автоколебаниями.

В качестве одной из простейших автоколебательных систем рассмотрим устройство, изображенное на рис. 185. Гибкая упругая линейка зажата одним концом неподвижно. Если оттянуть свободный конец линейки вниз и затем отпустить, линейка начнет совершать

затухающие колебания. Колебания можно сделать незатухающими, направив на конец линейки струйку воды так, чтобы струйка задевала линейку в тот момент, когда она находится в верхнем крайнем положении. Удары струйки о конец линейки восполняют убыль энергии колебаний, обусловленную трением.

В качестве второго примера автоколебательной системы рассмотрим часовой механизм. Маятник часов насажен на одну ось с изогнутым рычагом — анкером (рис. 186). На концах анкера имеются выступы специальной формы, называемые палеттами.

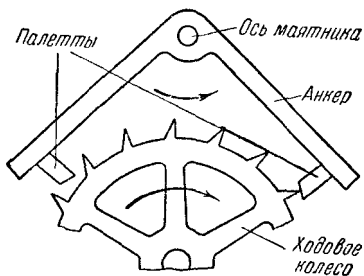


Рис. 186.

Зубчатое ходовое колесо находится под воздействием цепочки с гирей или закрученной пружины, которые стремятся повернуть его по часовой стрелке. Однако большую часть времени колесо упирается одним из зубьев в боковую

поверхность той либо иной палетты, скользящей при качании маятника по поверхности зуба. Только в моменты, когда маятник находится вблизи среднего положения, палетты перестают преграждать путь зубьям и ходовое колесо проворачивается, толкая анкер зубом, скользящим своей вершиной по скошенному торцу палетты. За полный цикл качаний маятника (за период) ходовое колесо проворачивается на два зуба, причем каждая из палетт получает по толчку. Через посредство этих толчков за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины и восполняется убыль энергии маятника, возникающая вследствие трения.

## § 75. Вынужденные колебания

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (мы будем называть ее вынуждающей силой). Пусть вынуждающая сила изменяется со временем по гармоническому закону

$$f = F_0 \cos \omega t. \quad (75.1)$$

При составлении уравнения движения пужно учесть, кроме вынуждающей силы, также те силы, которые действуют в системе при свободных колебаниях, т. е. квазиупругую силу и силу сопротивления среды. Предполагая колебания достаточно малыми, будем по-прежнему считать силу сопротивления пропорциональной скорости. Тогда уравнение движения запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Разделив это уравнение на  $m$  и перенеся члены с  $x$  и  $\dot{x}$  в левую часть, получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (75.2)$$

где  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ ,  $\beta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — собственная частота колебаний системы.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы уже знаем [см. функцию (73.10), являющуюся общим решением уравнения (73.2)]. Оно имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'), \quad (75.3)$$

где  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , а  $a_0$  и  $\alpha'$  — произвольные постоянные.

Остается найти частное (не содержащее произвольных постоянных) решение уравнения (75.2). Предположим, что это решение имеет вид

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (75.4)$$

(в данном случае удобно обозначить начальную фазу вместо  $\alpha$  через  $-\varphi$ ). С помощью векторной диаграммы (см. § 68 и 69) легко убедиться в том, что наше предположение справедливо, а также определить значения  $a$  и  $\varphi$ , при которых функция (75.4) удовлетворяет уравнению (75.2). Дифференцируя (75.4) по времени, первые два члена уравнения (75.2) можно представить в

следующем виде:

$$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (75.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi). \quad (75.6)$$

Как следует из (75.2), гармоническое колебание  $f_0 \cos \omega t$  является суммой трех гармонических колебаний той же частоты: колебания (75.6), колебания (75.5) и колебания  $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$ . Если изобразить последнее колебание вектором длины  $\omega_0^2 a$ , направленным

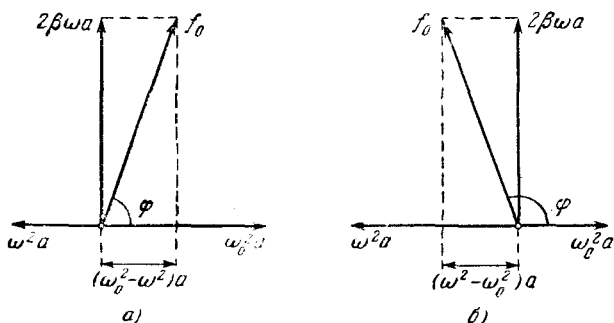


Рис. 187.

вправо (рис. 187), то колебание (75.5) изобразится вектором длины  $2\beta\omega a$ , повернутым относительно вектора  $\omega_0^2 x$  против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ , а колебание (75.6) — вектором длины  $\omega^2 a$ , повернутым относительно вектора  $\omega_0^2 x$  на угол  $\pi$ . Чтобы уравнение (75.2) было удовлетворено, векторная сумма перечисленных трех векторов должна совпадать с вектором, изображающим колебание  $f_0 \cos \omega t$ . Такое совпадение возможно лишь при значении амплитуды  $a$ , которое определяется условием (см. рис. 187, а)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

откуда

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (75.7)$$

Рис. 187, а отвечает случаю  $\omega < \omega_0$ . Из рис. 187, б, соответствующего случаю  $\omega > \omega_0$ , получается такое же значение  $a$ .

Рис. 187 позволяет получить также и значение  $\varphi$ , которое представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания (75.4) от обусловившей его вынуждающей силы (75.1). Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (75.8)$$

Подставив в (75.4) значения  $a$  и  $\varphi$ , определяемые формулами (75.7) и (75.8), получим частное решение неоднородного уравнения (75.2):

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (75.9)$$

Функция (75.9) в сумме с (75.3) дает общее решение уравнения (75.2), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (75.3) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний (рис. 188),

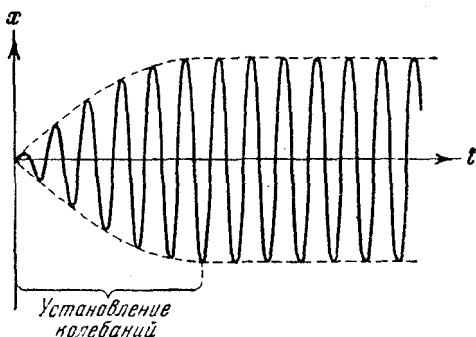


Рис. 188.

С течением времени из-за экспоненциального множителя  $e^{-\beta t}$  роль слагаемого (75.3) все больше уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь слагаемое (75.9).

Таким образом, функция (75.9) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (75.7) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей

силы. Для данной колебательной системы (определенных  $\omega_0$  и  $\beta$ ) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\varphi$  также зависит от частоты вынуждающей силы [см. (75.8)].

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота — резонансной частотой.

Чтобы определить резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$ , нужно найти максимум функции (75.7) или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по  $\omega$  и приравняв нулю, мы получим условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (75.10)$$

Уравнение (75.10) имеет три решения:  $\omega = 0$  и  $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Решение равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено, как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (75.11)$$

Подставив это значение частоты в (75.7), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (75.12)$$

Из (75.12) следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (75.11) резонансная частота при тех же условиях (при  $\beta = 0$ ) совпадает с собственной частотой колебаний системы  $\omega_0$ .

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (или, что то же самое, от



частоты колебаний) показана графически на рис. 189. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям параметра  $\beta$ . В соответствии с (75.11) и (75.12), чем меньше  $\beta$ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании (таком, что  $2\beta^2 > \omega_0^2$ ) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается — с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает (см. нижнюю кривую на рис. 189). Изображенная на

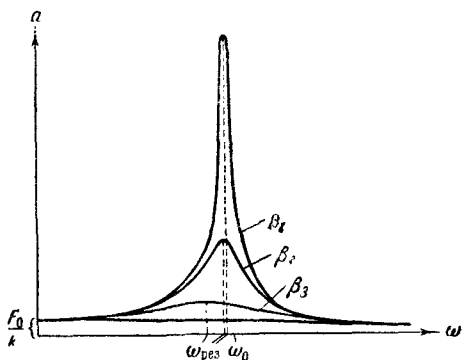


Рис. 189.

рис. 189 совокупность графиков функции (75.7), соответствующих различным значениям параметра  $\beta$ , называется резонансными кривыми.

По поводу резонансных кривых можно сделать еще следующие замечания. При стремлении  $\omega$  к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному  $f_0/\omega_0^2$ , т. е.  $F_0/k$ . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины  $F_0$ . При стремлении  $\omega$  к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия. Наконец, отметим, что чем меньше  $\beta$ , тем сильнее изменяется  $a$  с частотой амплитуда вблизи резонанса, тем «острее» получается максимум.

Из формулы (75.12) вытекает, что при малом затухании (т. е. при  $\beta \ll \omega_0$ ) амплитуда при резонансе приближенно равна

$$a_{\text{рез}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}.$$

Разделим это выражение на смещение  $x_0$  из положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$ , равное, как мы выяснили,  $f_0/\omega_0^2$ . В результате получим:

$$\frac{a_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

[см. формулу (73.13)]. Таким образом, добротность  $Q$  показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

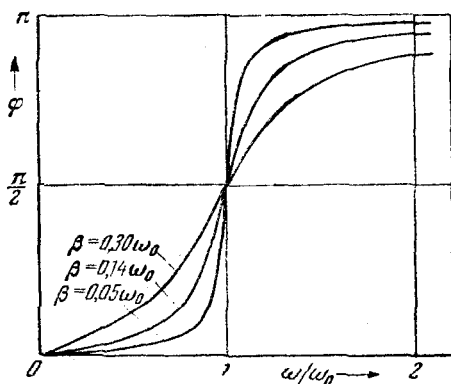


Рис. 190.

Как видно из рис. 187, вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\varphi$  лежит в пределах от 0 до  $\pi$ . Зависимость  $\varphi$  от  $\omega$  при разных значениях  $\beta$  показана графически на рис. 190. Частоте  $\omega_0$  соответствует  $\varphi = \pi/2$ . Резонансная частота меньше собственной [см. (75.11)]. Следовательно, в момент резонанса  $\varphi < \pi/2$ . При слабом затухании

$\varphi_{рез} \approx \omega_0$ , и значение  $\varphi$  при резонансе можно считать равным  $\pi/2$ .

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств ни в коем случае не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий. Так, например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должна сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут быть возбуждены вращением гребного винта или пропеллера. В противном случае возникают вибрации, которые могут вызвать катастрофу. Известны случаи, когда обрушивались мосты при прохождении по ним марширующих колонн солдат. Это происходило потому, что собственная частота колебаний моста оказывалась близкой к частоте, с которой шагала колонна.

Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т. д.

## § 76. Параметрический резонанс

В рассмотренном в предыдущем параграфе случае приложенная извне вынуждающая сила обуславливала непосредственно смещение системы из положения равновесия. Оказывается, существует иной вид воздействия извне, с помощью которого можно сильно раскачать систему. Этот вид воздействия заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется параметрическим резонансом.

Возьмем для примера простейший маятник — шарик на нитке. Если периодически изменять длину маятника  $l$ , увеличивая ее в моменты, когда маятник находится в крайних положениях, и уменьшая в моменты, когда маятник находится в среднем положении (рис. 191), то маятник сильно раскачается.

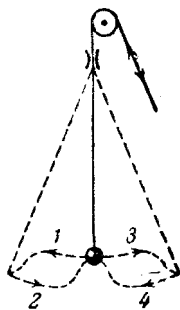


Рис. 191.

Увеличение энергии маятника при этом происходит за счет работы, которую совершает сила, действующая на нить. Сила натяжения нити при колебаниях маятника непостоянна: она меньше в крайних положениях, когда скорость обращается в нуль, и больше в среднем положении, когда скорость маятника максимальна. Поэтому отрицательная работа внешней силы при удлинении маятника оказывается меньше по величине, чем положительная работа, совершаемая при укорочении маятника. В итоге работа внешней силы за период оказывается больше нуля.

## ГЛАВА X

### ВОЛНЫ

#### § 77. Распространение волн в упругой среде

Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание начнет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью  $v$ . Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не переносятся волной, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Механические поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

На рис. 192 показано движение частиц при распространении в среде поперечной волны. Номерами 1, 2, 3 и т. д. обозначены частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии, равном  $\frac{1}{4} vT$ , т. е. на расстоянии,ходимом волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами. В момент времени, принятый на схеме

за нулевой, волна, распространяясь вдоль оси слева направо, достигла частицы 1, вследствие чего частица начала смещаться из положения равновесия вверх, увлекая за собой следующие частицы. Спустя четверть периода частица 1 достигает крайнего верхнего положения; одновременно начинает смещаться из положения равновесия частица 2. Спустя еще четверть периода первая частица будет проходить положение равновесия, двигаясь в направлении сверху вниз, вторая частица достигает крайнего верхнего положения, а третья частица

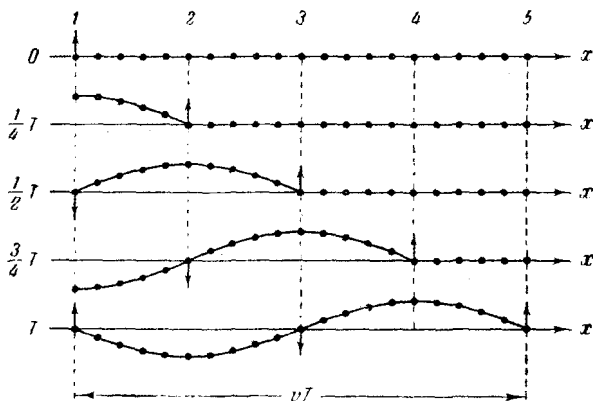


Рис. 192.

начинает смещаться вверх из положения равновесия. В момент времени, равный  $T$ , первая частица закончит полный цикл колебания и будет находиться в таком же состоянии движения, как и в начальный момент. Волна к моменту времени  $T$ , пройдя путь  $vT$ , достигнет частицы 5.

На рис. 193 показано движение частиц при распространении в среде продольной волны. Все рассуждения, касающиеся поведения частиц в поперечной волне, могут быть отнесены и к данному случаю с заменой смещений вверх и вниз смещениями вправо и влево. Как видно из рис. 193, при прохождении продольной волны в среде создаются чередующиеся сгущения и разрежения частиц (сгущения частиц отмечены на рисунке пунктиром), перемещающиеся в направлении распространения волны со скоростью  $v$ .

Все время, пока существует волна, частицы среды совершают колебания около своих положений равновесия, причем, как видно из рис. 192 и 193, различные частицы колеблются со сдвигом по фазе. Частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии  $vT$ <sup>1)</sup>, колеблются в

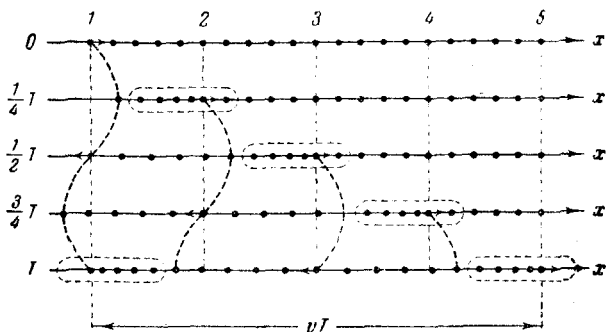


Рис. 193.

одинаковой фазе (добавление к фазе  $2\pi$  не оказывает на нее никакого влияния). Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися одинаковым образом (в одинаковой фазе), называется длиной волны  $\lambda$  (см. рис. 194, на котором изображено смещение  $\xi$  частиц из положения равновесия, как функция расстояния  $x$ , отсчитываемого вдоль направления распространения волны). Длина волны, очевидно, равна тому расстоянию, на которое распространяется волна за период:

$$\lambda = vT. \quad (77.1)$$

Заменяя в этом соотношении  $T$  через  $1/\nu$  [см. (62.9);  $\nu$  — частота колебаний], получим, что

$$\lambda\nu = v. \quad (77.2)$$

Последнее соотношение можно получить также из сле-

<sup>1)</sup> Имется в виду, что отстоят друг от друга на  $vT$  положения равновесия соответствующих частиц.

дующих соображений. За одну секунду источник волн совершает  $\nu$  колебаний, порождая в среде при каждом колебании один «гребень» и одну «впадину» волны. К тому моменту, как источник будет завершать  $\nu$ -е колебание, первый «гребень» успеет пройти путь  $v$ . Следовательно,  $\nu$  «гребней» и «впадин» волны должны уложиться на длине  $v$ .

В действительности колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$  (как это изображено на рис. 192 и 193), а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется фронтом волны (или волновым фронтом). Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положения равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — систему концентрических сфер.

## § 78. Уравнения плоской и сферической волн

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение, колеблющейся точки, как функцию ее координат<sup>1)</sup>,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ :

$$\xi = \xi(x, y, z; t). \quad (78.1)$$

<sup>1)</sup> Имеются в виду координаты равновесного положения точки,



Функция (78.1) должна быть периодической как относительно времени  $t$ , так и относительно координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Периодичность по  $t$  следует из того, что  $\xi$  описывает колебания точки с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Периодичность по координатам вытекает из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\lambda$ , колеблются одинаковым образом.

Найдем вид функции  $\xi$  в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, чтобы ось  $x$  совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярны к оси  $x$  и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ :

$$\xi = \xi(x, t).$$

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости  $x=0$  (рис. 195), имеют вид

$$\xi(0, t) = a \cos \omega t.$$

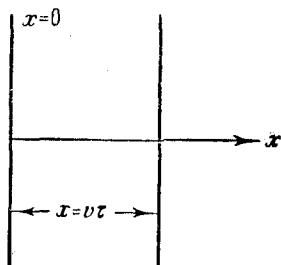


Рис. 195.

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению  $x$ . Для того чтобы пройти путь от плоскости  $x=0$  до этой плоскости, волне требуется время

$$\tau = \frac{x}{v},$$

где  $v$  — скорость распространения волны. Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости  $x$ , будут отставать по времени на  $\tau$  от колебаний частиц в плоскости  $x=0$ , т. е. будут иметь вид

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Итак, уравнение плоской волны запишется следующим образом:

$$\xi = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (78.2)$$

Величина  $\xi$  в (78.2) представляет собой смещение любой из точек с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . При

выводе формулы (78.2) мы предполагали, что амплитуда колебаний во всех точках одна и та же. В случае плоской волны это наблюдается, если энергия волны не поглощается средой.

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (78.2), положив:

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \text{const.} \quad (78.3)$$

Выражение (78.3) дает связь между временем ( $t$ ) и тем местом ( $x$ ), в котором зафиксированное значение фазы осуществляется в данный момент. Определив вытекающее из него значение  $\frac{dx}{dt}$ , мы найдем скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав выражение (78.3), получим:

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (78.4)$$

Таким образом, скорость распространения волны  $v$  в уравнении (78.2) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют фазовой скоростью. Из (78.4) следует, что скорость волны (78.2) положительна. Следовательно, уравнение (78.2) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания  $x$ . Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, имеет вид

$$\xi = a \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right). \quad (78.5)$$

Действительно, приравняв константе фазу волны (78.5) и продифференцировав, получим:

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

откуда и следует, что волна (78.5) распространяется в сторону убывания  $x$ .

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно  $t$  и  $x$  вид. Для этого введем так называемое волновое число  $k$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (78.6)$$

Из (77.1) и (78.6) вытекает, что между волновым числом  $k$ , круговой частотой  $\omega$  и фазовой скоростью волны  $v$  имеется соотношение

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (78.7)$$

Заменив в уравнении (78.2)  $v$  его значением (78.7) и внося в скобки  $\omega$ , получим уравнение плоской волны в виде

$$\xi = a \cos(\omega t - kx). \quad (78.8)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания  $x$ , будет отличаться от (78.8) только знаком при члене  $kx$ .

Теперь найдем уравнение сферической волны: Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяженностью. Однако если ограничиться рассмотрением волны на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать точечным.

В случае, когда скорость распространения волны во всех направлениях одна и та же, порождаемая точечным источником волна будет сферической. Предположим, что фаза колебаний источника равна  $\omega t$ . Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса  $r$ , будут колебаться с фазой  $\omega(t - r/v)$  (чтобы пройти путь  $r$ , волне требуется время  $\tau = r/v$ ). Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной — она убывает с расстоянием от источника по закону  $1/r$  (см. § 82). Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{a}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \quad (78.9)$$

где  $a$  — постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность  $a$  равна размерности амплитуды, умноженной на размерность длины (размерность  $r$ ).

Напомним, что в силу сделанных вначале предположений уравнение (78.9) справедливо только при  $r$ , значительно превышающих размеры источника. При стремлении  $r$  к нулю выражение для амплитуды обращается в бесконечность. Этот абсурдный результат объясняется неприменимостью уравнения для малых  $r$ .

## § 79. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении

В предыдущем параграфе мы получили уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении оси  $x$ . Найдем уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, образующем с осями координат  $x, y, z$  углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат (рис. 196), имеют вид

$$\xi_0 = a \cos \omega t. \quad (79.1)$$

Возьмем волновую поверхность (плоскость), отстоящую от начала координат на расстоянии  $l$ . Колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний (79.1) на время  $\tau = l/v$ ;

$$\xi = a \cos \omega \left( t - \frac{l}{v} \right). \quad (79.2)$$

Выразим  $l$  через радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точек рассматриваемой поверхности. Для этого введем единичный вектор  $\mathbf{n}$  нормали к волновой поверхности. Легко видеть, что скалярное произведение  $\mathbf{n}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  любой из точек поверхности имеет одно и то же значение, равное  $l$ :

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = r \cos \varphi = l. \quad (79.3)$$

Подставим выражение (79.3) для  $l$  в уравнение (79.2), внося одновременно в скобки  $\omega$ :

$$\xi = a \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} \mathbf{n}\mathbf{r} \right). \quad (79.4)$$

Отношение  $\omega/v$  равно волновому числу  $k$  [см. (78.7)]. Вектор

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad (79.5)$$

равный по модулю волновому числу  $k = 2\pi/\lambda$  и имеющий направление нормали к волновой поверхности, называется волновым вектором. Введя  $\mathbf{k}$  в (79.4), получим:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (79.6)$$

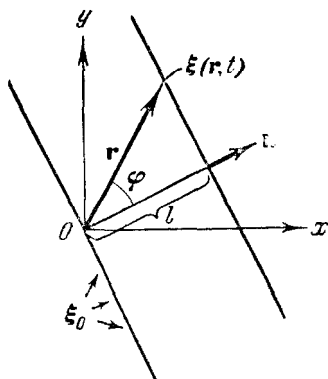


Рис. 196.

Функция (79.6) дает отклонение от положения равновесия точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}^1$ ) в момент времени  $t$ .

Чтобы перейти от радиуса-вектора точки к ее координатам  $x, y, z$ , выразим скалярное произведение  $\mathbf{kr}$  через проекции векторов на координатные оси

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тогда уравнение плоской волны принимает вид

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \quad (79.7)$$

где  $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$ ,  $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta$ ,  $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$ . Функция (79.7) дает отклонение точки с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . В случае, когда  $\mathbf{n}$  совпадает с осью  $x$ ,  $k_x = k$ ,  $k_y = k_z = 0$  и уравнение (79.7) переходит в уравнение (78.8).

Уравнение плоской волны иногда пишут в виде

$$\xi = \operatorname{Re} a e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}, \quad (79.8)$$

причем часто опускают знак  $\operatorname{Re}$  и пишут просто

$$\xi = a e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}, \quad (79.9)$$

подразумевая, что берется только вещественная часть этого выражения.

## § 80. Волновое уравнение

Оказывается, что уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым. Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по координатам и времени от функции (79.7), описывающей плоскую волну. Продифференцировав (79.7) дважды по каждой из переменных, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -\omega^2 \xi, \quad (80.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_z^2 \xi. \end{aligned} \right\} \quad (80.2)$$

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 266.

Сложим вместе уравнения (80.2):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi. \quad (80.3)$$

Теперь, сопоставляя уравнения (80.1) и (80.3), находим, что

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Наконец, учитывая, что согласно (78.7)  $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$ , получаем окончательно:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (80.4)$$

Уравнение (80.4) и есть искомое волновое уравнение. Легко убедиться в том, что волновому уравнению удовлетворяет не только функция (79.7), но и любая функция вида

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \quad (80.5)$$

Действительно, обозначая выражение, стоящее в скобках в правой части (80.5), через  $\xi$ , имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = f' \omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega \frac{df'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'' \omega^2 \quad (80.6)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f''; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f''; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f''. \quad (80.7)$$

Подстановкой выражений (80.6) и (80.7) в уравнение (80.4) легко убедиться в том, что функция (80.5) удовлетворяет волновому уравнению, если положить  $v = \omega/k$ .

<sup>1)</sup> Левая часть этого уравнения может быть записана более компактно с помощью оператора Лапласа  $\Delta$ . Оператором Лапласа обозначают символически совокупность действий, которые дают сумму вторых частных производных по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от функции этих переменных:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Используя оператор Лапласа, уравнение (80.4) можно записать в виде

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (80.4), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ , дает фазовую скорость этой волны. В зависимости от дополнительных условий, которые накладываются на решение уравнения (80.4), получается та либо иная волна.

## § 81. Скорость распространения упругих волн

Пусть в направлении оси  $x$  распространяется продольная плоская волна. Выделим в среде цилиндрический объем высотой  $\Delta x$  с площадью основания  $S$  (рис. 197). Смещения  $\xi$  частиц с разными  $x$  в каждый момент времени оказываются различными (см. рис. 194, на котором изображено  $\xi$  в функции от  $x$ ). Если основание цилиндра с координатой  $x$  имеет в некоторый момент времени смещение  $\xi$ , то смещение основания с координатой  $x + \Delta x$  будет  $\xi + \Delta \xi$ . Следовательно, рассматриваемый объем деформируется — он получает удлинение  $\Delta \xi$  ( $\Delta \xi$  — алгебраическая величина;  $\Delta \xi < 0$  соответствует сжатию цилиндра) или относительное удлинение  $\frac{\Delta \xi}{\Delta x}$ . Величина  $\frac{\Delta \xi}{\Delta x}$

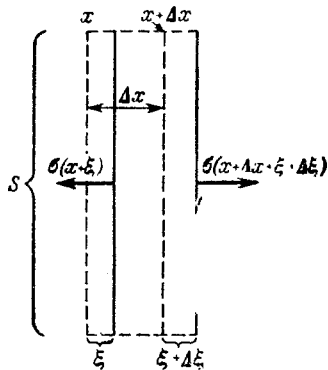


Рис. 197.

дает среднюю деформацию цилиндра. В силу того, что  $\xi$  меняется с изменением  $x$  не по линейному закону, истинная деформация в разных сечениях цилиндра будет неодинакова. Чтобы получить деформацию  $\varepsilon$  в сечении  $x$ , нужно устремить  $\Delta x$  к нулю. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (81.1)$$

(знак частной производной взят потому, что  $\xi$  зависит не только от  $x$ , но и от  $t$ ).

Наличие деформации растяжения свидетельствует о существовании нормального напряжения  $\sigma$ , при малых

деформациях пропорционального величине деформации. Согласно (45.5)

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (81.2)$$

где  $E$  — модуль Юнга среды.

Отметим, что относительная деформация  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ , а следовательно, и напряжение  $\sigma$  в фиксированный момент времени зависят от  $x$  (рис. 198). Там, где отклонения частиц от положения равновесия максимальны, деформация и напряжение равны нулю. В местах, где частицы проходят через положение равновесия, деформация и напряжение достигают максимального значения, причем положительные и отрицательные деформации (т. е. растя-

жения и сжатия) чередуются друг с другом. В соответствии с этим, как уже отмечалось в § 77, продольная волна состоит из чередующихся разрежений и сгущений среды.

Обратимся снова к цилиндрическому объему, изображенному на рис. 197, и напишем для него уравнение движения. Беря  $\Delta x$  очень малым, ускорение цилиндра можно принять равным  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Масса цилиндра равна  $\rho S \Delta x$ , где  $\rho$  — плотность недеформированной среды. Сила, действующая на цилиндр, равна произведению площади основания цилиндра  $S$  на разность нормальных напряжений в сечении  $(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)$  и в сечении  $(x + \xi)$

$$f = SE \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x + \Delta x + \xi + \Delta \xi} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x + \xi} \right]. \quad (81.3)$$

Величину  $\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x + \delta}$  для малых  $\delta$  можно с большой степенью точности представить в виде

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x + \delta} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]_x \delta = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta, \quad (81.4)$$



где под  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$  подразумевается значение второй производной  $\xi$  по  $x$  в сечении  $x$ .

Ввиду малости величин  $\Delta x$ ,  $\xi$  и  $\Delta \xi$  применим к выражению (81.3) преобразование (81.4):

$$f = SE \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \xi + \Delta \xi) \right] - \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi \right] \right\} = \\ = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \Delta \xi) \approx SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x$$

(относительное удлинение  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  при упругих деформациях бывает много меньше единицы. Поэтому  $\Delta \xi \ll \Delta x$ , так что слагаемым  $\Delta \xi$  в сумме  $(\Delta x + \Delta \xi)$  можно пренебречь).

Подставляя массу, ускорение и силу в уравнение второго закона Ньютона, получим:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Наконец, сокращая на  $S \Delta x$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (81.5)$$

которое представляет собой волновое уравнение (80.4), написанное для частного случая, когда  $\xi$  не зависит от  $y$  и  $z$ .

Сопоставляя (81.5) с (80.4), находим, что

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (81.6)$$

Таким образом, фазовая скорость продольных упругих волн равна корню квадратному из модуля Юнга, деленного на плотность среды.

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к следующему выражению для скорости:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (81.7)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

## § 82. Энергия упругой волны

Выделим в среде, в которой распространяется плоская продольная волна, элементарный объем  $\Delta V$ , настолько малый, чтобы деформации и скорости движения

во всех точках этого объема можно было считать одинаковыми и равными, соответственно,  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ .

Согласно формуле (45.15) выделенный нами объем будет обладать потенциальной энергией упругой деформации

$$\Delta E_p = \frac{E \epsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V,$$

где  $\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  — относительное удлинение, а  $E$  — модуль Юнга.

Заменим в соответствии с (81.6) модуль Юнга  $E$  через  $\rho v^2$  ( $\rho$  — плотность среды,  $v$  — фазовая скорость волны). Тогда выражение для потенциальной энергии объема  $\Delta V$  примет вид

$$\Delta E_p = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (82.1)$$

Рассматриваемый объем будет также обладать кинетической энергией

$$\Delta E_k = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (82.2)$$

( $\rho \Delta V$  — масса объема,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  — его скорость). Выражения (82.1) и (82.2) в сумме дают полную энергию

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Разделив энергию  $\Delta E$  на объем  $\Delta V$ , в котором она содержится, получим плотность энергии

$$u = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (82.3)$$

Дифференцирование уравнения плоской волны (78.2) по  $t$  и  $x$  дает:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = + \omega a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Подставив эти выражения в формулу (82.3), получим:

$$u = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx). \quad (82.4)$$

В случае поперечной волны для плотности энергии получается такое же выражение.

Как следует из (82.4), плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Поскольку среднее значение квадрата синуса равно половине, среднее (по времени) значение плотности энергии в каждой точке среды будет равно

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (82.5)$$

Плотность энергии (82.4) и ее среднее значение (82.5) пропорциональны плотности среды  $\rho$ , квадрату частоты  $\omega$  и квадрату амплитуды волны  $a$ . Подобная зависимость имеет место не только для плоской волны с постоянной амплитудой, но и для других видов волн.

Итак, среда, в которой возникает волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной, следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии  $\Phi$  через поверхность. Поток энергии — скалярная величина, размерность которой равна размерности энергии, деленной на размерность времени, т. е. совпадает с размерностью мощности. В соответствии с этим  $\Phi$  можно измерять в *эрг/сек*, *ваттах* и т. д.

Поток энергии в разных точках среды может обладать различной интенсивностью. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая плотностью потока энергии. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

Пусть через площадку  $\Delta S_{\perp}$ , перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время  $\Delta t$  энергия  $\Delta E$ . Тогда плотность потока энергии  $j$  по определению равна

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta S_{\perp} \Delta t}. \quad (82.6)$$

Учитывая, что  $\frac{\Delta E}{\Delta t}$  есть поток энергии  $\Delta\Phi$  через поверхность  $\Delta S_{\perp}$ , можно написать:

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_{\perp}}. \quad (82.7)$$

Через площадку  $\Delta S_{\perp}$  (рис. 199) за время  $\Delta t$  будет перенесена энергия  $\Delta E$ , заключенная в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S_{\perp}$  и высотой  $v \Delta t$  ( $v$  — фазовая скорость волны). Если размеры цилиндра достаточно малы (за счет малости  $\Delta S_{\perp}$  и  $\Delta t$ ) для того, чтобы плотность энергии во всех точках цилиндра можно было считать одинаковой, то  $\Delta E$  можно найти как произведение плотности энергии  $u$  на объем цилиндра, равный  $\Delta S_{\perp} v \Delta t$ :

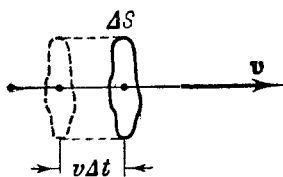


Рис. 199.

$$\Delta E = u \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Подставив это выражение для  $\Delta E$  в формулу (82.6), получим:

$$j = uv. \quad (82.8)$$

Рассматривая фазовую скорость  $v$  как вектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны (и переноса энергии), можно написать:

$$\mathbf{j} = uv. \quad (82.9)$$

Вектор плотности потока энергии был впервые введен в рассмотрение выдающимся русским физиком Н. А. Умовым и называется вектором Умова. Вектор (82.9), как и плотность энергии  $u$ , различен в разных точках пространства, а в данной точке пространства изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение его с учетом (82.5) равно

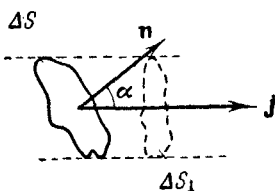


Рис. 200.

$$\mathbf{j}_{\text{ср}} = \bar{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}. \quad (82.10)$$

Зная  $\mathbf{j}$  в некоторой точке пространства, можно найти поток энергии через помещенную в эту точку любым об-

разом ориентированную малую площадку  $\Delta S$  (рис. 200). Для этого спроектируем  $\Delta S$  на плоскость, перпендикулярную к вектору  $\mathbf{j}$ . Величина проекции  $\Delta S_{\perp}$  будет, очевидно, равна

$$\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha, \quad (82.11)$$

где  $\alpha$  — угол, образованный нормалью  $\mathbf{n}$  к  $\Delta S$  и вектором  $\mathbf{j}$ .

Вследствие малости  $\Delta S$  можно считать, что через  $\Delta S$  течет такой же поток, как и через  $\Delta S_{\perp}$ . Поток же через  $\Delta S_{\perp}$  в соответствии с (82.7) равен

$$\Delta \Phi = j \Delta S_{\perp}.$$

Заменяя  $\Delta S_{\perp}$  его значением (82.11), получаем:

$$\Delta \Phi = j \Delta S \cos \alpha.$$

Но  $j \cos \alpha$  есть не что иное, как величина составляющей вектора  $\mathbf{j}$  по направлению нормали  $\mathbf{n}$  к площадке  $\Delta S$ :

$$j_n = j \cos \alpha.$$

Следовательно, можно написать, что

$$\Delta \Phi = j_n \Delta S. \quad (82.12)$$

Итак, поток энергии через малую площадку  $\Delta S$  равен произведению нормальной составляющей вектора плотности потока энергии на  $\Delta S$ .

Зная  $\mathbf{j}$  в любой точке произвольной поверхности  $S$ , можно вычислить поток энергии  $\Phi$  через эту поверхность. С этой целью разобьем поверхность на элементарные участки  $\Delta S$ , столь малые, чтобы каждый из них можно было считать плоским, а вектор  $\mathbf{j}$  в пределах каждого  $\Delta S$  можно было считать постоянным как по величине, так и по направлению. Тогда элементарный поток  $\Delta \Phi$  через каждый участок  $\Delta S$  можно вычислить по формуле (82.12), беря для каждой  $\Delta S$  свое значение  $j_n$ , которое зависит от величины вектора  $\mathbf{j}$  в том месте, где расположена площадка  $\Delta S$ , и от ориентации этой площадки по отношению к  $\mathbf{j}$ .

Полный поток через поверхность  $S$  будет равен сумме элементарных потоков:

$$\Phi = \sum \Delta \Phi = \sum j_n \Delta S. \quad (82.13)$$

Полученное нами выражение является приближенным. Чтобы получить точное значение  $\Phi$ , нужно устремить все  $\Delta S$  к нулю. При этом сумма (82.13) перейдет в интеграл

$$\Phi = \int_S j_n dS, \quad (82.14)$$

который должен быть взят по всей поверхности  $S$ . Формула (82.14) дает связь между плотностью потока энергии в различных точках поверхности и потоком энергии через эту поверхность.

Вычислим поток энергии через волновую поверхность сферической волны. Нормальная составляющая вектора плотности потока энергии во всех точках волновой поверхности одинакова и имеет среднее значение

$$\bar{j}_n = \frac{1}{2} \rho a_r^2 \omega^2 v$$

( $a_r$  — амплитуда волны на расстоянии  $r$  от источника).

Вынося в (82.14) постоянное значение  $\bar{j}_n$  за знак интеграла, получим:

$$\Phi_{\text{средн}} = \bar{j}_n S = \frac{1}{2} \rho a_r^2 \omega^2 v 4\pi r^2.$$

Если энергия волны не поглощается средой, средний поток энергии через сферу любого радиуса должен иметь одинаковое значение:

$$\Phi_{\text{средн}} = 2\pi r \omega^2 v a_r^2 r^2 = \text{const.}$$

Отсюда следует, что амплитуда  $a_r$  сферической волны обратно пропорциональна расстоянию  $r$  от источника волны [см. (78.9)].

В § 78 мы отмечали, что амплитуда плоской волны может быть постоянной лишь при условии, что энергия волны не поглощается средой. В противном случае интенсивность волны с удалением от источника постепенно уменьшается — наблюдается затухание волны. Как показывает опыт, такое затухание происходит по экспоненциальному закону. Это означает, что амплитуда волны убывает с расстоянием  $x$  по закону  $a = a_0 e^{-\gamma x}$ , так что уравнение плоской волны имеет вид:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx). \quad (82.15)$$

Величина  $\gamma$  называется коэффициентом затухания волны (или коэффициентом поглощения<sup>1)</sup> волны). Она имеет размерность, обратную размерности длины. Легко сообразить, что величина, обратная  $\gamma$ , равна расстоянию, на котором амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз (ср. с коэффициентом затухания колебаний  $\beta$ , § 73).

В соответствии с (82.10) интенсивность волны (82.15) убывает с расстоянием  $x$  по закону

$$j_{\text{ср}} = j_{\text{ср}0} e^{-2\gamma x}. \quad (82.16)$$

Уравнение сферической волны, распространяющейся в поглощающей среде, имеет вид:

$$\xi = \frac{ae^{-\gamma r}}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (82.17)$$

### § 83. Интерференция и дифракция волн

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это вытекающее из опыта утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) волн.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются когерентными. Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Рассмотрим две волны, распространяющиеся от точечных источников  $O_1$  и  $O_2$ , колеблющихся с постоянной разностью фаз (такие источники называются, как и порождаемые ими волны, когерентными). Определим результирующее колебание в какой-либо точке среды при

<sup>1)</sup> Правильнее называть коэффициентом поглощения величину, характеризующую убывание не амплитуды, а интенсивности волны. Эта величина равна  $2\gamma$ .

условии, что оба колебания, вызываемые каждой из волн в отдельности, имеют одинаковое направление (для этого расстояние между источниками волн должно быть значительно меньше расстояния от источников до данной точки либо колебания должны иметь направление, перпендикулярное к плоскости, в которой лежат источники и данная точка).

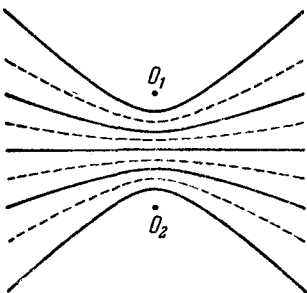


Рис. 201.

Пусть фазы колебаний источников  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно  $(\omega t + \alpha_1)$  и  $(\omega t + \alpha_2)$ . Тогда колебание в данной точке будет равно сумме колебаний:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_1 \cos(\omega t + \alpha_1 - kr_1), \\ \xi_2 &= a_2 \cos(\omega t + \alpha_2 - kr_2), \end{aligned}$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — амплитуды волн в рассматриваемой точке,  $k$  — волновое число,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от источников волн до данной точки.

В точках, определяемых условием

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (83.1)$$

колебания усиливают друг друга и результирующее движение представляет собой гармоническое колебание частоты  $\omega$  с амплитудой  $(a_1 + a_2)$ .

В точках, для которых

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (83.2)$$

колебания ослабляют друг друга и результирующее движение является гармоническим колебанием с амплитудой, равной  $|a_1 - a_2|$ . В частном случае, когда  $a_1 = a_2$ , колебания в этих точках будут отсутствовать.

Условия (83.1) и (83.2) сводятся к тому, что

$$r_1 - r_2 = \text{const.} \quad (83.3)$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (83.3) есть уравнение гиперболы с фокусами в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Таким образом, геометрические места точек, в которых колебания усиливают или ослабляют друг друга, представляют собой семейство гипербол (рис. 201,



отвечающий случаю  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ . Сплошными линиями указаны места, в которых колебания усиливают друг друга, пунктирными — места, в которых колебания ослабляют друг друга).

Волны, встретив на своем пути препятствие, огибают его. Это явление называется дифракцией. Возникновение дифракции можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса, которым устанавливается способ построения фронта волны в момент времени  $t + \Delta t$  по известному положению фронта в момент времени  $t$ . Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент (рис. 202, среда предполагается неоднородной — скорость волны в нижней части рисунка больше, чем в верхней).

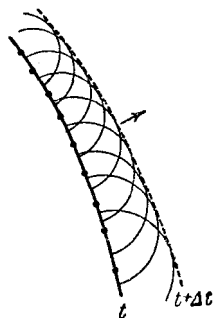


Рис. 202.

Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 203). По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка волнового

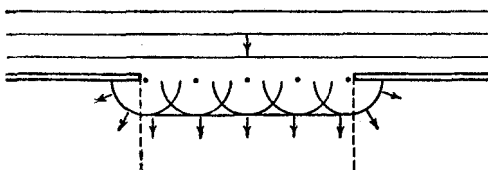


Рис. 203.

фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы убеждаемся в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени (на рисунке границы этой области показаны пунктиром), огибая края преграды.

## § 84. Стоячие волны

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется стоячей волной. Практически

стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = a \cos(\omega t + kx).$$

Складывая вместе оба уравнения и преобразовывая результат по формуле для суммы косинусов, получаем:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos kx \cos \omega t.$$

Заменяв волновое число  $k$  его значением  $2\pi/\lambda$ , выражению для  $\xi$  можно придать следующий вид:

$$\xi = \left(2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (84.1)$$

Уравнение (84.1) и есть уравнение стоячей волны. Из него видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда оказывается зависящей от  $x$ :

$$\text{амплитуда} = \left|2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right|.$$

В точках, где

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (84.2)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения  $2a$ . Эти точки называются пучностями стоячей волны. Из условия (84.2) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (84.3)$$

В точках, где

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки среды, нахо-

двигаясь в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют следующие значения:

$$x_{\text{узн}} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (84.4)$$

Из формул (84.3) и (84.4) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно  $\lambda/2$ . Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

Обратимся снова к уравнению (84.1). Множитель  $(2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda})$  при переходе через нулевое значение меняет знак. В соответствии с этим фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на  $\pi$ , т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одной и той

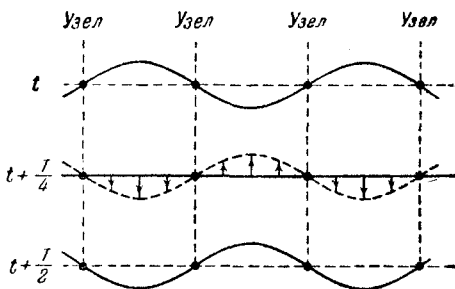


Рис. 204.

же фазе). На рис. 204 дан ряд «моментальных фотографий» отклонений точек от положения равновесия. Первая «фотография» соответствует моменту, когда отклонения достигают наибольшего абсолютного значения. Последующие «фотографии» сделаны с интервалами в четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц.

Продифференцировав уравнение (84.1) по  $x$  и  $t$ , мы найдем закон, по которому изменяется деформация среды  $\varepsilon$  и скорость частиц  $\dot{\xi}$ :

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t, \quad (84.5)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t. \quad (84.6)$$

Уравнение (84.5) описывает стоячую волну деформации, а (84.6) — стоячую волну скорости. Из вида

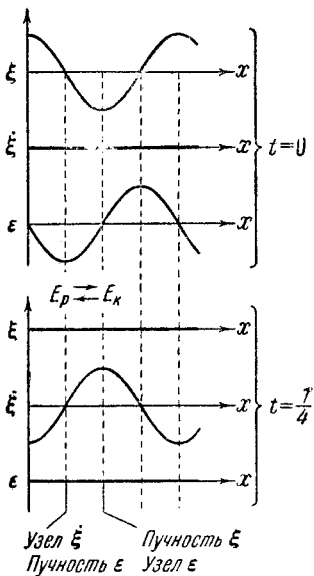


Рис. 205.

этих уравнений следует, что узлы и пучности скорости совпадают с узлами и пучностями смещения; узлы же и пучности деформации совпадают соответственно с пучностями и узлами скорости и смещения (рис. 205). В то время как  $\xi$  и  $\epsilon$  достигают максимальных значений,  $\dot{\xi}$  обращается в нуль, и наоборот. Соответственно дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов волны (где находятся пучности деформации), то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны (где находятся пучности скорости). В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

## § 85. Колебания струны

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причем в местах закрепления струны должны располагаться узлы. Поэтому в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только такие колебания, половина длины волны которых укладывается на длине струны целое число раз (рис. 206). Отсюда вытекает условие

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (85.1)$$

где  $l$  — длина струны. Длинам волн (85.1) соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

( $v$  — фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины, т. е. линейной плотностью струны).

Частоты  $\nu_n$  называются собственными частотами колебаний струны. Собственные частоты оказываются кратными частоте

$$\nu_1 = \frac{v}{2l},$$

которая называется основной частотой. Частоты, отвечающие  $n = 2, 3, \dots$ , носят название обертонов (первый обертон соответствует  $n = 2$ , второй  $n = 3$  и т. д.). В общем случае колебания струны могут представлять собой наложение нескольких стоячих волн с различными собственными частотами.

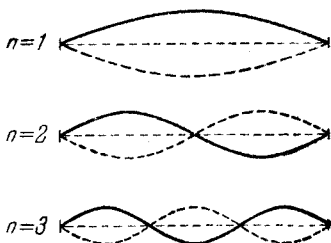


Рис. 206.

## § 86. Эффект Доплера

Пусть в упругой среде на некотором расстоянии от источника волн располагается воспринимающее колебания среды устройство, которое мы будем называть приемником. Когда источник и приемник волн неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте  $\nu_0$  колебаний источника. Если же источник или приемник либо оба они движутся относительно среды, то частота  $\nu$ , воспринимаемая приемником, может оказаться отличной от  $\nu_0$ . Это явление называется эффектом Доплера.

Для простоты предположим, что приемник и источник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника  $v_{\text{ист}}$  будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если источник удаляется от приемника. Аналогично скорость приемника  $v_{\text{пр}}$  будем считать положительной, если приемник приближается к источнику, и

отрицательной, если приемник удаляется от источника.

Если источник неподвижен и колеблется с частотой  $\nu_0$ , то к моменту, когда источник будет завершать  $\nu_0$ -е колебание, порожденный первым колебанием «гребень» волны успеет пройти в среде путь  $v$  ( $v$  — скорость распространения волны относительно среды). Следовательно, порождаемые источником за секунду  $\nu_0$  «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине  $v$ . Если же источник движется относительно среды со скоростью  $v_{\text{ист}}$ , то в момент, когда источник будет завершать  $\nu_0$ -е колебание, «гребень», порожденный первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии  $v - v_{\text{ист}}$

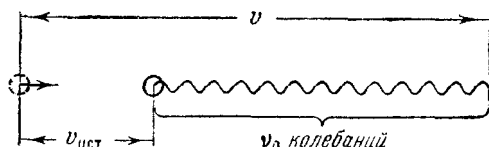


Рис. 207.

(рис. 207). Следовательно,  $\nu_0$  «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине  $v - v_{\text{ист}}$ , так что длина волны будет равна

$$\lambda = \frac{v - v_{\text{ист}}}{\nu_0}. \quad (86.1)$$

Мимо неподвижного приемника пройдут за секунду «гребни» и «впадины», укладываемые на длине  $v$ . Если приемник движется со скоростью  $v_{\text{пр}}$ , то в конце секундного промежутка времени он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка отстояла от его теперешнего положения на  $v$ . Таким образом, приемник воспримет за секунду колебания, отвечающие «гребням» и «впадинам», укладываемым на длине  $v + v_{\text{пр}}$  (рис. 208), и будет колебаться с частотой

$$\nu = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda}. \quad (86.2)$$

Подставив в (86.2) выражение (86.1) для  $\lambda$ , получаем:

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{ист}}}. \quad (86.3)$$

Согласно формуле (86.3) при таком движении приемника и источника, что расстояние между ними сокращается, воспринимаемая приемником частота  $\nu$  оказывается больше частоты источника  $\nu_0$ . Если расстояние между источником и приемником растет,  $\nu$  будет меньше, чем  $\nu_0$ .

Когда направление движения источника и приемника не совпадает с направлением соединяющей их прямой,

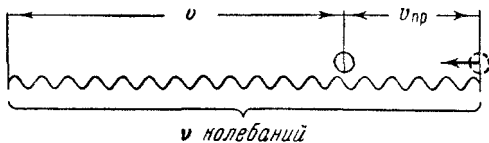


Рис. 208.

в формуле (86.3) под  $v_{ист}$  и  $v_{пр}$  следует понимать проекции скоростей источника и приемника на направление указанной прямой.

## § 87. Звуковые волны

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах примерно от 20 до 20 000 *гц*, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, лежащую в указанных пределах, называют звуковыми волнами или просто звуком. Упругие волны с частотой, меньшей 20 *гц*, называют инфразвуком; волны с частотами, превышающими 20 000 *гц*, называют ультразвуком. Инфра- и ультразвук человеческое ухо не слышит.

Звуковая волна в газах и жидкостях может быть только продольной и состоит из чередующихся сжатий и разрежений среды. В твердых телах могут распространяться как продольные, так и поперечные волны.

Воспринимаемые звуки люди различают по высоте, тембру и громкости. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Всякий реальный звук представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением гармонических колебаний с определенным набором частот.

Набор частот колебаний, присутствующих в данном звуке, называется его акустическим спектром. Если в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале от  $\nu'$  до  $\nu''$ , то спектр называется сплошным. Если звук состоит из колебаний дискретных (т. е. отделенных друг от друга конечными интервалами) частот  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  и т. д., то спектр называется линейчатый. На рис. 209 показан сплошной (вверху) и линейчатый (внизу) спектр. По оси абсцисс отложена частота колебания  $\nu$ , по оси ординат — его интенсивность  $I$ .

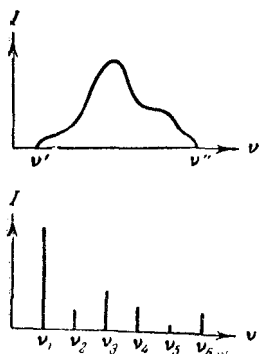


Рис. 209.

Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется тональным.

Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой (см. частоту  $\nu_1$  на рис. 209). Относительная интенсивность обертонов (т. е. колебаний с частотами  $\nu_2, \nu_3$  и т. д.) определяет окраску, или тембр, звука. Различный спектральный состав звуков, возбуждаемых разными музыкальными инструментами, позволяет отличить на слух, например, флейту от скрипки или рояля.

## § 88. Скорость звуковых волн в газах

Упругая волна в газе представляет собой распространяющуюся в пространстве последовательность чередующихся областей сжатия и разрежения газа. Следовательно, давление в каждой точке пространства испытывает периодически изменяющееся отклонение  $\Delta p$  от среднего значения  $p$ , совпадающего с давлением, которое существует в газе в отсутствие волн. Таким образом, мгновенное значение давления в некоторой точке простран-

<sup>1)</sup> К этому параграфу следует вернуться после того, как будут изучены § 102 и 103.



ства можно представить в виде

$$p' = p + \Delta p.$$

Пусть звуковая волна распространяется вдоль оси  $x$ . Подобно тому, как мы поступили в § 81 при нахождении скорости упругих волн в твердой среде, рассмотрим объем газа в виде цилиндра высоты  $\Delta x$  с площадью основания  $S$  (рис. 210). Масса газа, заключенного в этом объеме, равна  $\rho S \Delta x$ , где  $\rho$  — плотность невозмущенного волной газа. Ввиду малости  $\Delta x$  ускорение во всех точках цилиндра можно считать одинаковым и равным  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ .

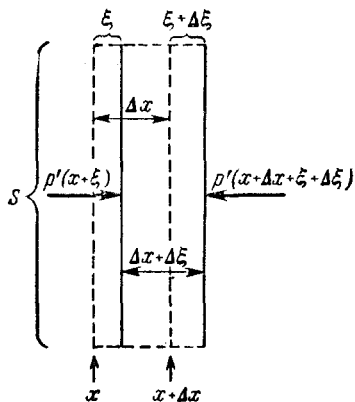


Рис. 210.

Для нахождения силы  $f$ , действующей на рассматриваемый объем газа, нужно взять произведение площади основания цилиндра  $S$  на разность давлений в сечении  $(x + \xi)$  и в сечении  $(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)$ . Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (81.5), получим:

$$f = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x$$

[напомним, что при выводе формулы (81.5) использовалось предположение:  $\Delta \xi \ll \Delta x$ ]. Итак, мы нашли массу выделенного объема газа, его ускорение и действующую на него силу. Теперь напишем для этого объема газа уравнение второго закона Ньютона:

$$(\rho S \Delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x.$$

После сокращения на  $S \Delta x$  получим:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (88.1)$$

В полученном нами дифференциальном уравнении содержатся две неизвестные функции:  $\xi$  и  $p'$ . Для того чтобы уравнение можно было решить, нужно выразить

одну из этих функций через другую. Для этого найдем связь между давлением газа  $p'$  и относительным изменением его объема  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Эта связь зависит от характера процесса сжатия (или расширения) газа. В звуковой волне сжатия и разрежения газа следуют друг за другом так часто, что смежные участки среды не успевают обмениваться теплом, и процесс можно считать адиабатическим. При адиабатическом процессе связь между давлением и объемом данной массы газа дается уравнением (103.4). Поэтому можно написать, что

$$p(S \Delta x)^\gamma = p' [S(\Delta x + \Delta \xi)]^\gamma = p' \left[ S \left( \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right]^\gamma = \\ = p' (S \Delta x)^\gamma \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma,$$

где  $\gamma$  — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Сократив на  $(S \Delta x)^\gamma$ , получим:

$$p = p' \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma.$$

Воспользовавшись тем, что по предположению  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$ , разложим выражение  $\left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma$  в ряд по степеням  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  и пренебрежем членами высших порядков малости. В результате мы придем к формуле:

$$p = p' \left( 1 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

Решим это уравнение относительно  $p'$ :

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}} \approx p \left( 1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^1. \quad (88.2)$$

Из найденного нами соотношения легко получить выражение для  $\Delta p$ :

$$\Delta p = p' - p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (88.3)$$

---

<sup>1)</sup> Мы воспользовались формулой  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ , справедливой для  $x \ll 1$ .

Поскольку  $\gamma$  — величина порядка единицы, из (88.3) вытекает, что  $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\Delta p}{p} \right|$ . Таким образом, условие  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$  физически означает, что отклонение давления от среднего значения много меньше самого давления. Это действительно так: для самых громких звуков амплитуда колебаний давления воздуха не превышает 1 мм рт. ст., в то время как атмосферное давление  $p$  имеет величину порядка  $10^3$  мм рт. ст.

Продифференцировав выражение (88.2) по  $x$ , найдем, что

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Наконец, подставив найденное значение  $\frac{\partial p'}{\partial x}$  в формулу (88.1), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (88.4)$$

Сопоставление (88.4) с волновым уравнением (80.4) дает для скорости звуковых волн в газе следующее выражение:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (88.5)$$

(напомним, что  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность невозмущенного волной газа).

На первый взгляд может показаться, что скорость звука в газе зависит от давления. Однако это не так, потому что изменение давления сопровождается изменением плотности газа.

При обычных давлениях поведение газов хорошо описывается уравнением

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (88.6)$$

( $m$  — масса газа, заключенного в объеме  $V$ ;  $\mu$  — масса моля, численно равная молекулярному весу газа). Разделив массу газа  $m$  на его объем  $V$ , можно получить плотность  $\rho$ . Разрешив уравнение (88.6) относительно  $m/V$ , находим:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Подставив это выражение для плотности в (88.5), получим для скорости звука в газе следующую формулу:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (88.7)$$

Отсюда следует, что скорость звука в газе зависит от температуры и от значений характеризующих газ величин  $\gamma$  и  $\mu$ . От давления скорость звука в газе не зависит.

Средняя скорость теплового движения молекул определяется по формуле

$$\bar{v}_{\text{мол}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

[см. (106.17)]. Сравнение этой формулы с (88.7) дает, что скорость звука в газе  $v$  связана со средней скоростью молекул соотношением

$$v = \bar{v}_{\text{мол}} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{8}}. \quad (88.8)$$

Подстановка значения  $\gamma$  для воздуха, равного 1,4, дает, что  $v \approx \frac{3}{4} \bar{v}_{\text{мол}}$ . Максимальное возможное значение  $\gamma$  составляет  $\frac{5}{3}$ . В этом случае  $v \approx \frac{4}{5} \bar{v}_{\text{мол}}$ . Таким образом, скорость звука в газе оказывается того же порядка, что и средняя скорость теплового движения молекул, но всегда несколько меньше, чем  $\bar{v}_{\text{мол}}$ .

Оценим величину скорости звука в воздухе при комнатной температуре (при абсолютной температуре порядка 290° К). Для воздуха  $\gamma = 1,40$ ,  $\mu = 29$ . Универсальная газовая постоянная равна  $8,31 \cdot 10^3$  Дж/кмоль·град. Подставим эти значения в формулу (88.7):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 290}{29}} = 340 \text{ м/сек.}$$

Найденное нами значение  $v$  хорошо согласуется с величиной, полученной опытным путем. Измерив скорость звука в газе с известным молекулярным весом, можно по формуле (88.7) вычислить  $\gamma$  — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме. Этим приемом пользуются на практике.

Весьма существенно то, что звук не обнаруживает дисперсии, т. е. зависимости скорости от частоты. Такая зависимость, очевидно, сделала бы невозможной или во всяком случае сильно затрудненной речь и не позволила бы нам наслаждаться музыкой.

## § 89. Шкала уровней силы звука

Под интенсивностью звуковых волн понимают среднее значение плотности потока энергии, которую несет с собой волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется порогом слышимости. Порог слышимости несколько различен для разных лиц

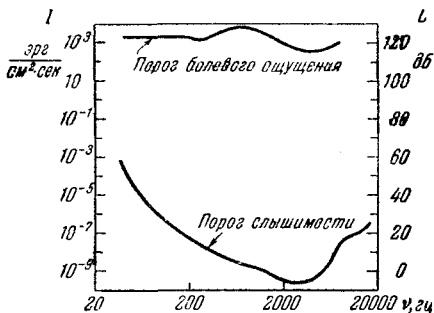


Рис. 211.

и сильно зависит от частоты звука. Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000 гц. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около  $10^{-9} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$ . При других частотах порог слышимости лежит выше (см. нижнюю кривую на рис. 211).

При интенсивностях порядка  $10^3$ — $10^4 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$  волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе лишь ощущение боли и давления. Значение интенсивности, при котором это происходит, называется порогом болевого ощущения. Порог болевого ощущения, так же как и порог слышимости, зависит от частоты (см. верхнюю кривую на рис. 211; данные, приведенные на этом рисунке, относятся к среднему нормальному слуху).

Субъективно оцениваемая громкость возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. На этом основании уровень громкости  $L$  определяется как логарифм отношения

интенсивности данного звука  $I$  к интенсивности  $I_0$ , принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (89.1)$$

Исходная интенсивность  $I_0$  принимается равной  $10^{-9}$  эрг/см<sup>2</sup>·сек, так что порог слышимости при частоте порядка 1000 гц лежит на нулевом уровне ( $L = 0$ ).

Единица уровня громкости  $L$ , определяемая формулой (89.1), называется белом. Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами — децибелами (дб). Очевидно, что значение  $L$  в децибелах определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (89.2)$$

Отметим, что отношение двух любых интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$  также может быть выражено в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (89.3)$$

По формуле (89.3) может быть выражено в децибелах уменьшение интенсивности (затухание) волны на некотором пути. Так, например, затухание в 20 дб означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз.

Весь диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение (от  $10^{-9}$  до  $10^4$  эрг/см<sup>2</sup>·сек), соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 дб. В таблице 3 приведены ориентировочные значения уровня громкости для некоторых типичных звуков.

Энергия, которую несут с собой звуковые волны, крайне мала. Если, например, предположить, что стакан с водой полностью поглощает всю падающую на него энергию звуковой волны с уровнем громкости в 70 дб (в этом случае количество поглощаемой в секунду энергии будет составлять примерно  $60 \cdot 10^{-2}$  эрг/сек), то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребуется время порядка тридцати тысяч лет.

Найдем связь между интенсивностью звуковых волн  $I$  и амплитудой колебаний давления  $(\Delta p)_m$ . В начале

Характеристика звука	Уровень громкости, дБ	Интенсивность эрг/см <sup>2</sup> ·сек
Тикание часов . . . . .	20	10 <sup>-7</sup>
Шепот на расстоянии 1 м . . . . .	30	10 <sup>-6</sup>
Тихий разговор . . . . .	40	10 <sup>-5</sup>
Речь средней громкости . . . . .	60	10 <sup>-3</sup>
Громкая речь . . . . .	70	10 <sup>-2</sup>
Крик . . . . .	80	10 <sup>-1</sup>
Шум самолетного мотора:		
на расстоянии 5 м . . . . .	120	10 <sup>3</sup>
на расстоянии 3 м . . . . .	130	10 <sup>4</sup>

этого параграфа было указано, что интенсивность  $I$  совпадает со средним значением плотности потока энергии, которое в соответствии с (82.10) равно

$$I = j_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v, \quad (89.4)$$

где  $\rho$  — плотность невозмущенного газа,  $a$  — амплитуда колебаний частиц<sup>1)</sup> среды, т. е. амплитуда колебаний величины  $\xi$ ,  $\omega$  — частота,  $v$  — фазовая скорость волны.

Пусть  $\xi$  изменяется по закону  $\xi = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ . Тогда  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = a \frac{\omega}{v} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ . Согласно (88.3)  $\Delta p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Подставив значение  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ , получим закон изменения  $\Delta p$ :

$$\Delta p = -\gamma p a \frac{\omega}{v} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = -(\Delta p)_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний  $\xi$  (т. е.  $a$ ) связана с амплитудой колебаний давления  $(\Delta p)_m$  соотношением

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma p \omega}. \quad (89.5)$$

<sup>1)</sup> Под частицами среды подразумеваются не отдельные молекулы, а макроскопические (т. е. заключающие в себе большое количество молекул) объемы, линейные размеры которых много меньше длины волны.

Легко убедиться в том, что, подставив в формулу (89.4) значение (89.5) для  $a$  и значение (88.5) для  $v$ , можно после несложных преобразований прийти к соотношению

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\rho v}. \quad (89.6)$$

С помощью этой формулы можно подсчитать, что диапазону уровней громкости от 0 до 130 дб соответствуют примерные значения амплитуды колебаний давления воздуха от  $3 \cdot 10^{-4}$  дин/см<sup>2</sup> (т. е.  $2 \cdot 10^{-7}$  мм рт. ст.) до 1000 дин/см<sup>2</sup> ( $\sim 1$  мм рт. ст.).

Произведем оценку амплитуды колебаний частиц  $a$  и амплитуды скорости частиц  $(\dot{\xi})_m$ . Начнем с оценки величины  $a$ , определяемой формулой (89.5). Приняв во внимание, что  $\frac{v}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ , получим соотношение:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \approx 0,1 \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \quad (89.7)$$

( $\gamma \approx 1,5$ , следовательно,  $2\pi\gamma \approx 10$ ).

При громкости в 130 дб отношение  $(\Delta p)_m/\rho$  имеет величину порядка  $10^{-3}$ , при громкости в 60 дб это отношение составляет примерно  $2 \cdot 10^{-7}$ . Длины звуковых волн в воздухе лежат в пределах от 17 м (при  $v=20$  гц) до 17 мм (при  $v=20\,000$  гц). Подставив эти данные в формулу (89.7), найдем, что при громкости в 60 дб амплитуда колебаний частиц составляет  $\sim 3 \cdot 10^{-4}$  мм для самых длинных волн и  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$  мм для самых коротких волн. При громкости в 130 дб амплитуда колебаний для самых длинных волн достигает  $\sim 1,7$  мм.

При гармонических колебаниях амплитуда скорости  $(\dot{\xi})_m$  равна, как мы знаем, амплитуде смещения  $a$ , умноженной на круговую частоту  $\omega$ :  $(\dot{\xi})_m = a\omega$ . Умножив выражение (89.5) на  $\omega$ , получим соотношение:

$$\frac{(\dot{\xi})_m}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \approx \frac{(\Delta p)_m}{\rho}. \quad (89.8)$$

Следовательно, при громкости в 130 дб амплитуда скорости составляет примерно  $340$  м/сек  $\cdot 10^{-3} = 0,34$  м/сек.



При громкости в 60 дб амплитуда скорости будет порядка 0,1 мм/сек.

Заметим, что, в отличие от амплитуды смещения, амплитуда скорости не зависит от длины волны.

## § 90. Ультразвук

Для того, чтобы получить направленную, т. е. близкую к плоской, волну, размеры излучателя должны быть во много раз больше длины волны. Звуковые волны в воздухе имеют длину примерно от 15 м до 15 мм. В жидких и твердых средах длина волны оказывается еще большей (скорость распространения звуковых волн в этих средах больше, чем в воздухе). Построить излучатель, который создавал бы направленную волну подобной длины, практически не представляется возможным. Иначе обстоит дело для ультразвуковых волн, длина которых гораздо меньше. С уменьшением длины волны уменьшается также роль дифракции в процессе распространения волн. Поэтому ультразвуковые волны могут быть получены в виде направленных пучков, подобных пучкам света.

Для возбуждения ультразвуковых волн в настоящее время используют в основном два явления: обратный пьезоэлектрический эффект и магнитострикцию. Обратный пьезоэлектрический эффект состоит в том, что пластинка, вырезанная определенным образом из некоторых кристаллов (например, кварца, сегнетовой соли, титаната бария и т. д.), под действием электрического поля слегка деформируется (удлинится при поле одного направления и сжимается при поле противоположного направления). Поместив такую пластинку между металлическими обкладками, на которые подается переменное напряжение, можно вызвать вынужденные механические колебания пластинки. Эти колебания становятся особенно интенсивными, если частота изменений электрического напряжения совпадает с частотой собственных колебаний пластинки. Колебания пластинки передаются окружающей ее жидкой или газообразной среде и порождают в этой среде ультразвуковую волну.

Магнитострикция заключается в том, что ферромагнитные вещества (железо, никель, некоторые сплавы и т. д.) при действии на них магнитного поля слегка

деформируются. Поэтому, поместив ферромагнитный стержень в переменное магнитное поле (например, внутрь катушки, по которой течет переменный ток), можно возбудить его механические колебания, которые опять-таки будут особенно интенсивными при резонансе.

Направленные ультразвуковые пучки нашли широкое применение для целей локации (обнаружения предметов и определения расстояний до них) в воде. Впервые идея ультразвуковой локации была высказана выдающимся французским физиком П. Ланжевром (1872—1946) и разработана им во время первой мировой войны для обнаружения подводных лодок. В настоящее время ультразвуковые локации используются для обнаружения айсбергов, косяков рыбы и т. п.

Известно, что крикнув и определив время до прихода эха, т. е. звука, отраженного от препятствия — скалы, леса, поверхности воды в колодце и т. д., — можно, умножив половину этого времени на скорость звука, найти расстояние до препятствия. На этом принципе устроен упомянутый выше лоцатор, а также ультразвуковой эхолот, который применяется для измерения глубины и снятия рельефа морского дна. Излучатель, укрепленный на корпусе корабля, посылает в вертикальном направлении короткие ультразвуковые импульсы. Импульсы, отраженные от дна, регистрируются приемником. По времени, прошедшему между испусканием импульса и его приемом, вычисляется глубина.

Метод ультразвуковой локации позволяет летучей мыши хорошо ориентироваться при полете в темноте. Летучая мышь периодически испускает импульсы ультразвуковой частоты и по воспринимаемым с помощью органа слуха отраженным сигналам с большой точностью судит о расстояниях до окружающих ее предметов.

В 1928 г. советский ученый С. Я. Соколов предложил использовать ультразвук для целей дефектоскопии, т. е. обнаружения изъянов (дефектов) в изделиях. Если размеры дефекта больше длины волны, то ультразвуковой импульс будет отражаться от дефекта и возвращаться обратно. Посылая в изделие ультразвуковые импульсы и регистрируя отраженные импульсы, можно не только обнаруживать наличие дефектов в изделиях, но и судить о размерах и месте расположения этих дефектов. Разработанный Соколовым и другими учеными метод

ультразвуковой дефектоскопии находит все большее применение.

Обладая большой интенсивностью и создавая при своем прохождении сильные пульсации давления в среде, ультразвуковые волны могут обуславливать целый ряд специфических явлений: измельчение (диспергирование) частиц, взвешенных в жидкости, образование эмульсий (взвесей мельчайших капелек одной жидкости в другой, не смешивающейся с ней жидкости), ускорение процессов диффузии, растворения, активацию химических реакций и т. д.

ЧАСТЬ 3  
**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА  
И ТЕРМОДИНАМИКА**

---

ГЛАВА XI  
**ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ**

**§ 91. Молекулярно-кинетическая теория (статистика)  
и термодинамика**

Молекулярная физика представляет собой раздел физики, изучающий строение и свойства вещества, исходя из так называемых молекулярно-кинетических представлений. Согласно этим представлениям, любое тело — твердое, жидкое или газообразное — состоит из большого количества весьма малых обособленных частиц — молекул<sup>1)</sup>. Молекулы всякого вещества находятся в беспорядочном, хаотическом, не имеющем какого-либо преимущественного направления движении. Его интенсивность зависит от температуры вещества.

Непосредственным доказательством существования хаотического движения молекул служит броуновское движение. Это явление заключается в том, что весьма малые (видимые только в микроскоп) взвешенные в жидкости частицы всегда находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, которое не зависит от внешних причин и оказывается проявлением внутреннего движения вещества. Броуновские частицы совершают движение под влиянием беспорядочных ударов молекул.

Молекулярно-кинетическая теория ставит себе целью истолковать те свойства тел, которые непосредственно наблюдаются на опыте (давление, температуру и т. п.),

---

<sup>1)</sup> Атомы можно рассматривать как одноатомные молекулы.

как суммарный результат действия молекул. При этом она пользуется статистическим методом, интересуясь не движением отдельных молекул, а лишь такими средними величинами, которые характеризуют движение огромной совокупности частиц. Отсюда другое ее название — статистическая физика.

Изучением различных свойств тел и изменений состояния вещества занимается также термодинамика. Однако в отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика изучает макроскопические свойства тел и явлений природы, не интересуясь их микроскопической картиной. Не вводя в рассмотрение молекулы и атомы, не входя в микроскопическое рассмотрение процессов, термодинамика позволяет делать целый ряд выводов относительно их протекания.

В основе термодинамики лежит несколько фундаментальных законов (называемых началами термодинамики), установленных на основании обобщения большой совокупности опытных фактов. В силу этого выводы термодинамики имеют весьма общий характер.

Подходя к рассмотрению изменений состояния вещества с различных точек зрения, термодинамика и молекулярно-кинетическая теория взаимно дополняют друг друга, образуя по существу одно целое.

Обращаясь к истории развития молекулярно-кинетических представлений, следует прежде всего отметить, что представления об атомистическом строении вещества были высказаны еще древними греками. Однако у древних греков эти идеи были не более чем гениальной догадкой. В XVII в. атомистика возрождается вновь, но уже не как догадка, а как научная гипотеза. Особенное развитие эта гипотеза получила в трудах гениального русского ученого и мыслителя М. В. Ломоносова (1711—1765), который предпринял попытку дать единую картину всех известных в его время физических и химических явлений. При этом он исходил из корпускулярного (по современной терминологии — молекулярного) представления о строении материи. Восставая против господствовавшей в его время теории теплорода (гипотетической тепловой жидкости, содержание которой в теле определяет степень его нагретости), Ломоносов «причину тепла» видит во вращательном движении частиц тела. Таким образом, Ломоносовым были по

существо сформулированы молекулярно-кинетические представления.

Во второй половине XIX в. и в начале XX в. благодаря трудам ряда ученых атомистика превратилась в научную теорию.

## § 92. Масса и размеры молекул

Для характеристики масс атомов и молекул применяются величины, получившие название атомный вес и молекулярный вес (очевидно, правильнее было бы их называть атомной и молекулярной массой).

Атомным весом ( $A$ ) химического элемента называется отношение массы атома этого элемента к  $1/12$  массы атома  $C^{12}$  (так обозначается изотоп углерода с массовым числом 12; см. «Атомную физику»). Молекулярным весом ( $M$ ) вещества называется отношение массы молекулы этого вещества к  $1/12$  массы атома  $C^{12}$ . Определяемая таким образом шкала масс атомов и молекул называется шкалой  $C^{12} = 12^1$ ). По этой шкале атомный вес  $C^{12}$  равен точно 12, кислорода  $O^{16}$  — 15,9949, а самого легкого из элементов, водорода, 1,0080 (для природной смеси изотопов). Как следует из их определения, атомный и молекулярный веса — безразмерные величины.

Единица массы, равна  $1/12$  массы атома  $C^{12}$  сокращенно обозначается латинской буквой «u» (unit) или русской буквой «е» (единица). Обозначим величину этой единицы, выраженную в килограммах, через  $m_{ед}$ . Тогда масса атома, выраженная в килограммах, будет равна  $A m_{ед}$ , а масса молекулы  $M m_{ед}$ .

Легко сообразить, что два химически простых вещества, взятых в таких количествах, что их массы  $m_1$  и  $m_2$  относятся как атомные веса  $A_1$  и  $A_2$ , будут содержать по одинаковому числу атомов. Аналогично два

---

<sup>1)</sup> Прежде применялась шкала  $O^{16} = 16$ , по которой атомный вес  $O^{16}$  (изотопа кислорода с массовым числом 16) равен точно 16. Однако  $O^{16}$  неудобен для масс-спектрографического сравнения с массами других атомов и молекул. Весьма удобен для этой цели один из изотопов углерода. Поэтому состоявшаяся в 1960 г. X Генеральная ассамблея Международного союза чистой и прикладной физики (ЮПАП) рекомендовала шкалу  $C^{12} = 12$ . В связи с этим АН СССР приняла решение о переходе к новой шкале атомных и молекулярных весов.

химически сложных вещества, взятых в таких количествах, что их массы относятся как молекулярные веса, будут содержать по одинаковому числу молекул.

Такое количество данного элемента, масса которого, выраженная в килограммах, численно равна его атомному весу, называют килограмм-атомом. Такое количество данного вещества, масса которого, выраженная в килограммах, численно равна его молекулярному весу, называется килограмм-молекулой или кратко киломолем (обозначается *кмоль*).

В СГС — системе вместо килограмм-атома пользуются грамм-атомом (представляющим собой *A* граммов данного элемента), а вместо килограмм-молекулы — грамм-молекулой, или молем (который представляет собой *M* граммов данного вещества).

Масса килограмм-молекулы  $\mu$  численно равна молекулярному весу *M*. Это служит причиной того, что  $\mu$  иногда называют молекулярным весом. Однако следует иметь в виду, что, в то время как *M* — величина безразмерная, масса киломоля  $\mu$  имеет размерность *кг/кмоль*. Очевидно, что, рассматривая атомы как одноатомные молекулы, килограмм-атом можно считать килограмм-молекулой, для которой  $\mu$  численно равна *A*.

Поскольку массы килограмм-молекул относятся как соответствующие молекулярные веса, киломоли всех веществ содержат одно и то же число молекул, равное

$$N_A = \frac{\mu}{M m_{\text{ед}}},$$

что численно равно  $1/m_{\text{ед}}$ . Число  $N_A$  называется числом Авогадро. Опытным путем найдено, что

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}.$$

В СГС-системе числом Авогадро называют число молекул в грамм-молекуле вещества. Следовательно, в этой системе

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Зная число Авогадро, можно найти единичную массу  $m_{\text{ед}}$ . В самом деле,  $m_{\text{ед}}$  численно равна  $1/N_A$ , т. е.  $1/6,023 \cdot 10^{26} = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг. Таким образом, масса любого атома равна  $1,66 \cdot 10^{-27}$  А кг, масса любой молекулы равна  $1,66 \cdot 10^{-27}$  М кг.

Теперь произведем оценку размеров молекул. Естественно предположить, что в жидкостях молекулы располагаются довольно близко друг к другу. Поэтому приближенную оценку объема одной молекулы можно получить, разделив объем киломоля какой-либо жидкости, например воды, на число молекул в киломоле  $N_A$ . Киломоль (т. е. 18 кг) воды занимает объем 0,018 м<sup>3</sup>. Следовательно, на долю одной молекулы приходится объем, равный

$$\frac{0,018}{6 \cdot 10^{25}} = 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Отсюда следует, что линейные размеры молекул воды приблизительно равны

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3 \text{ \AA}.$$

Молекулы других веществ также имеют размеры порядка нескольких ангстрем.

### § 93. Состояние системы. Процесс

Системой тел или просто системой мы будем называть совокупность рассматриваемых тел. Примером системы может служить жидкость и находящийся в равновесии с ней пар. В частности, система может состоять из одного тела.

Всякая система может находиться в различных состояниях, отличающихся температурой, давлением, объемом и т. д. Подобные величины, характеризующие состояние системы, называются параметрами состояний.

Не всегда какой-либо параметр имеет определенное значение. Если, например, температура в разных точках тела неодинакова, то телу нельзя приписать определенное значение параметра  $T$ . В этом случае состояние называется неравновесным. Если такое тело изолировать от других тел и предоставить самому себе, то температура выравняется и примет одинаковое для всех точек значение  $T$  — тело перейдет в равновесное состояние. Это значение  $T$  не изменяется до тех пор, пока тело не будет выведено из равновесного состояния воздействием извне.



То же самое может иметь место и для других параметров, например для давления  $p$ . Если взять газ, заключенный в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным поршнем, и начать быстро вдвигать поршень, то под ним образуется газовая подушка, давление в которой будет больше, чем в остальном объеме газа. Следовательно, газ в этом случае не может быть охарактеризован определенным значением давления  $p$  и состояние его будет неравновесным. Однако если прекратить перемещение поршня, то давление в разных точках объема выравняется и газ перейдет в равновесное состояние.

Итак, равновесным состоянием системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными сколь угодно долго.

Если по координатным осям откладывать значения каких-либо двух параметров, то любое равновесное состояние системы может быть изображено точкой на этом графике (см., например, точку 1 на рис. 212). Неравновесное состояние не может быть изображено таким способом, потому что хотя бы один из параметров не будет иметь в неравновесном состоянии определенного значения.

Всякий процесс, т. е. переход системы из одного состояния в другое, связан с нарушением равновесия системы. Следовательно, при протекании в системе какого-либо процесса она проходит через последовательность неравновесных состояний. Обращаясь к уже рассмотренному процессу сжатия газа в сосуде, закрытом поршнем, можно заключить, что нарушение равновесия при вдвигании поршня тем значительнее, чем быстрее производится сжатие газа. Если вдвигать поршень очень медленно, то равновесие нарушается незначительно и давление в разных точках мало отличается от некоторого среднего значения  $p$ . В пределе, если сжатие газа происходит бесконечно медленно, газ в каждый момент

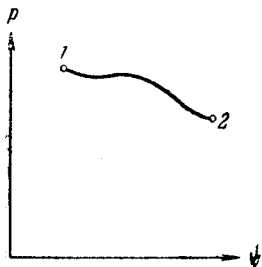


Рис. 212.

времени будет характеризоваться определенным значением давления. Следовательно, в этом случае состояние газа в каждый момент времени является равновесным и бесконечно медленный процесс будет состоять из последовательности равновесных состояний.

Процесс, состоящий из непрерывной последовательности равновесных состояний, называется равновесным. Из сказанного следует, что равновесным может быть только бесконечно медленный процесс, поэтому равновесный процесс является абстракцией.

Равновесный процесс может быть изображен на графике соответствующей кривой (рис. 212). Неравновесные процессы мы будем условно изображать пунктирными кривыми.

Понятия равновесного состояния и равновесного процесса играют большую роль в термодинамике. Все количественные выводы термодинамики строго применимы только к равновесным процессам.

## § 94. Внутренняя энергия системы

Внутренней энергией какого-либо тела называется энергия этого тела за вычетом кинетической энергии тела как целого и потенциальной энергии тела во внешнем поле сил. Так, например, при определении внутренней энергии некоторой массы газа не должна учитываться энергия движения газа вместе с сосудом и энергия, обусловленная нахождением газа в поле сил земного тяготения.

Следовательно, в понятие внутренней энергии включаются кинетическая энергия хаотического движения молекул, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами и внутримолекулярная энергия.

Внутренняя энергия системы тел равна сумме внутренних энергий каждого из тел в отдельности и энергии взаимодействия между телами, представляющей собой энергию межмолекулярного взаимодействия в тонком слое на границе между телами.

Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Это означает, что всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от предыстории системы. Следовательно, изме-

нение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое будет всегда равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях, независимо от пути, по которому совершался переход, т. е. независимо от процесса или совокупности процессов, приведших к переходу системы из одного состояния в другое.

## § 95. Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия может изменяться за счет в основном двух различных процессов: совершения над телом работы  $A'$  и сообщения ему количества тепла  $Q$ . Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, воздействующих на систему. Так, например, при вдвигании поршня, закрывающего заключенный в сосуде газ, поршень, перемещаясь, совершает над газом работу  $A'$ . По третьему закону Ньютона газ при этом совершает над поршнем работу  $A = -A'$ .

Сообщение телу тепла не связано с перемещением внешних тел и, следовательно, не связано с совершением над телом макроскопической (т. е. относящейся ко всей совокупности молекул, из которых состоит тело) работы. В этом случае изменение внутренней энергии обусловлено тем, что отдельные молекулы более нагретого тела совершают работу над отдельными молекулами тела, нагретого меньше. Передача энергии происходит при этом также через излучение. Совокупность микроскопических (т. е. захватывающих не все тело, а отдельные его молекулы) процессов, приводящих к передаче энергии от тела к телу, носит название теплопередачи.

Подобно тому как количество энергии, переданное одним телом другому, определяется работой  $A$ , совершаемой друг над другом телами, количество энергии, переданное от тела к телу путем теплопередачи, определяется количеством тепла  $Q$ , отданного одним телом другому. Таким образом, приращение внутренней энергии системы должно быть равно сумме совершенной над системой работы  $A'$  и количества сообщенного системе тепла  $Q$ :

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \quad (95.1)$$

Здесь  $U_1$  и  $U_2$  — начальное и конечное значения внутренней энергии системы. Обычно вместо работы  $A'$ , совершаемой внешними телами над системой, рассматривают работу  $A$  (равную  $-A'$ ), совершаемую системой над внешними телами. Подставив  $-A$  вместо  $A'$  и разрешив относительно  $Q$ , уравнение (95.1) можно привести к виду

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (95.2)$$

Уравнение (95.2) выражает закон сохранения энергии и представляет собой содержание первого закона (начала) термодинамики. Словами его можно выразить следующим образом: *количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.*

Сказанное отнюдь не означает, что всегда при сообщении тепла внутренняя энергия системы возрастает. Может случиться, что, несмотря на сообщение системе тепла, ее энергия не растет, а убывает ( $U_2 < U_1$ ). В этом случае согласно (95.2)  $A > Q$ , т. е. система совершает работу как за счет получаемого тепла  $Q$ , так и за счет запаса внутренней энергии, убыль которой равна  $U_1 - U_2$ . Нужно также иметь в виду, что величины  $Q$  и  $A$  в (95.2) являются алгебраическими ( $Q < 0$  означает, что система в действительности не получает тепло, а отдает).

Из (95.2) следует, что количество тепла  $Q$  можно измерять в тех же единицах, что и работу или энергию. В СИ единицей количества тепла служит джоуль.

Для измерения количества тепла применяется также особая единица, называемая калорией. Одна калория равна количеству тепла, необходимому для нагревания 1 г воды от 19,5 до 20,5°С. Тысяча калорий называется большой калорией или килокалорией.

Опытным путем установлено, что одна калория эквивалентна 4,18 дж. Следовательно, один джоуль эквивалентен 0,24 кал. Величина  $I = 4,18$  дж/кал называется механическим эквивалентом тепла.

Если величины, входящие в (95.2), выражены в разных единицах, то некоторые из этих величин нужно умножить на соответствующий эквивалент. Так, например, выражая  $Q$  в калориях, а  $U$  и  $A$  в джоулях, соотношение (95.2) нужно записать в виде

$$IQ = U_2 - U_1 + A.$$

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что  $Q$ ,  $A$  и  $U$  выражены в одинаковых единицах, и писать уравнение первого начала в виде (95.2).

При вычислении совершенной системой работы или полученного системой тепла обычно приходится разбивать рассматриваемый процесс на ряд элементарных процессов, каждый из которых соответствует весьма малому (в пределе — бесконечно малому) изменению параметров системы. Уравнение (95.2) для элементарного процесса имеет вид

$$\Delta'Q = \Delta U + \Delta'A, \quad (95.3)$$

где  $\Delta'Q$  — элементарное количество тепла,  $\Delta'A$  — элементарная работа и  $\Delta U$  — приращение внутренней энергии системы в ходе данного элементарного процесса.

Весьма важно иметь в виду, что  $\Delta'Q$  и  $\Delta'A$  нельзя рассматривать как приращения величин  $Q$  и  $A$ . Соответствующее элементарному процессу  $\Delta$  какой-либо величины  $f$  можно рассматривать как приращение этой величины только в том случае, если  $\sum \Delta f$ , соответствующая переходу из одного состояния в другое, не зависит от пути, по которому совершается переход, т. е. если величина  $f$  является функцией состояния. В отношении функции состояния можно говорить о ее «запасе» в каждом из состояний. Например, можно говорить о запасе внутренней энергии, которым обладает система в различных состояниях.

Как мы увидим в дальнейшем, величина совершенной системой работы и количество полученного системой тепла зависят от пути перехода системы из одного состояния в другое. Следовательно, ни  $Q$ , ни  $A$  не являются функциями состояния, в силу чего нельзя говорить о запасе тепла или работы, которым обладает система в различных состояниях.

Таким образом, в символ  $\Delta$ , стоящий при  $A$  и  $Q$ , вкладывается иной смысл, чем в символ  $\Delta$ , стоящий при  $U$ . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в первом случае  $\Delta$  снабжено штрихом. Символ  $\Delta U$  означает приращение внутренней энергии, символы  $\Delta'Q$  и  $\Delta'A$  означают не приращение, а элементарное количество теплоты и работы.

Чтобы произвести вычисления, в (95.3) переходят к дифференциалам. Тогда уравнение первого начала

принимает следующий вид<sup>1)</sup>:

$$d'Q = dU + d'A. \quad (95.4)$$

Интегрирование (95.4) по всему процессу приводит к выражению

$$Q = (U_2 - U_1) + A,$$

тождественному с уравнением (95.2).

Еще раз подчеркнем, что, например, результат интегрирования  $d'A$  нельзя записать в виде

$$\int_1^2 d'A = A_2 - A_1.$$

Такая запись означала бы, что совершенная системой работа равна разности значений (т. е. запасов) работы во втором и первом состояниях.

### § 96. Работа, совершаемая телом при изменениях его объема

Взаимодействие данного тела с соприкасающимися с ним телами можно охарактеризовать давлением, которое оно на них оказывает. С помощью давления можно описать взаимодействие газа со стенками сосуда, а также твердого или жидкого тела со средой (например, газом), которая его окружает. Перемещение точек приложения сил взаимодействия сопровождается изменением объема тела. Следовательно, работа, совершаемая данным телом над внешними телами, может быть выражена через давление и изменения объема тела.

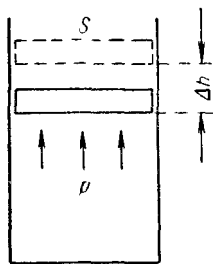


Рис. 213.

Чтобы найти это выражение, рассмотрим следующий пример.

Пусть газ заключен в цилиндрический сосуд, закрытый плотно пригнанным легко скользящим поршнем (рис. 213). Если по каким-либо причинам газ станет расширяться, он будет перемещать поршень и совер-

<sup>1)</sup> В уравнении (95.4)  $dU$  представляет собой полный дифференциал,  $d'Q$  и  $d'A$  не являются полными дифференциалами.

шать над ним работу. Элементарная работа, совершаемая газом при перемещении поршня на отрезок  $\Delta h$ , равна

$$\Delta' A = f \Delta h,$$

где  $f$  — сила, с которой газ действует на поршень. Заменяя эту силу произведением давления газа  $p$  на площадь поршня  $S$ , получаем:

$$\Delta' A = p S \Delta h.$$

Но  $S \Delta h$  представляет собой приращение объема газа  $\Delta V$ . Поэтому выражение для элементарной работы можно записать следующим образом:

$$\Delta' A = p \Delta V. \quad (96.1)$$

Величина  $\Delta' A$  в (96.1), очевидно, является алгебраической. Действительно, при сжатии газа направления перемещения  $\Delta h$  и силы  $f$ , с которой газ действует на поршень, противоположны, вследствие чего элементарная работа  $\Delta' A$  будет отрицательна. Приращение объема  $\Delta V$  в этом случае также будет отрицательным. Таким образом, формула (96.1) дает правильное выражение для работы при любых изменениях объема газа.

Если давление газа остается постоянным (для этого должна одновременно изменяться соответствующим образом температура), работа, совершаемая при изменении объема от значения  $V_1$  до значения  $V_2$ , будет равна

$$A_{12} = p (V_2 - V_1). \quad (96.2)$$

Если же при изменении объема давление не остается постоянным, формула (96.1) справедлива только для достаточно малых  $\Delta V$ . В этом случае работа, совершаемая при конечных изменениях объема, должна вычисляться как сумма элементарных работ вида (96.1), т. е. путем интегрирования:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (96.3)$$

Из сказанного в § 93 ясно, что полученные нами формулы могут быть применены только к равновесным процессам.

Найденные выражения для работы справедливы при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим еще один пример. Возьмем твердое тело произвольной формы, погруженное в жидкую или газообразную среду, которая оказывает на тело одинаковое во всех точках давление  $p$  (рис. 214). Предположим, что тело расширяется так, что отдельные элементарные участки его поверхности  $\Delta S_i$  получают различные перемещения  $\Delta h_i$ . Тогда  $i$ -й участок совершит работу  $\Delta'A_i$ , равную  $p\Delta S_i\Delta h_i$ . Работа, совершаемая телом, может быть найдена как сумма работ отдельных участков:

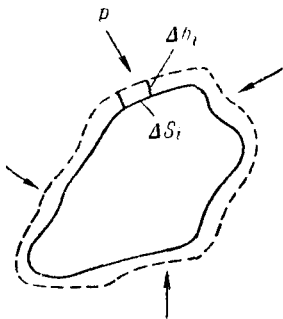


Рис. 214.

совершаемая телом, может быть найдена как сумма работ отдельных участков:

$$\Delta'A = \sum \Delta'A_i = \sum p \Delta S_i \Delta h_i.$$

Вынося за знак суммы одинаковое для всех участков  $p$  и замечая, что  $\sum \Delta S_i \Delta h_i$  дает приращение объема тела  $\Delta V$ , можно написать:

$$\Delta'A = p \Delta V,$$

т. е. и в общем случае мы приходим к формуле (96.1).

Изобразим процесс изменения объема тела на диаграмме  $(p, V)$  (рис. 215). Элементарной работе  $\Delta'A_i = p_i \Delta V_i$  соответствует площадь узкой заштрихованной полоски на графике. Очевидно, что площадь, ограниченная осью  $V$ , кривой  $p = f(V)$  и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ , численно равна работе, совершаемой при изменении объема от значения  $V_1$  до  $V_2$ .

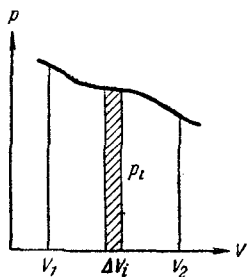


Рис. 215.

Заметим, что, используя выражение (96.1) (с переходом к дифференциалам), уравнение (95.4) первого начала термодинамики можно написать следующим образом:

$$d'Q = dU + p dV. \quad (96.4)$$



## § 97. Температура

К определению понятия температуры можно прийти на основании следующих соображений. Если несколько соприкасающихся тел находятся в состоянии теплового равновесия, т. е. не обмениваются энергией путем теплопередачи, то этим телам приписывается одинаковая температура. Если при установлении теплового контакта между телами одно из них передает энергию другому посредством теплопередачи, то первому телу приписывается бóльшая температура, чем второму. Ряд свойств тел — объем, электрическое сопротивление и т. п. — зависит от температуры. Любое из этих свойств может быть использовано для количественного определения температуры.

Приведем тело, выбранное нами для измерения температуры (термометрическое тело), в тепловое равновесие с тающим льдом, припишем телу в этом случае температуру  $0^\circ$  и охарактеризуем количественно то свойство тела (температурный признак), которое мы намереваемся использовать для измерения температуры. Пусть в качестве такого признака выбран объем тела и значение его при  $0^\circ$  равно  $V_0$ . Затем приведем то же тело в тепловое равновесие с кипящей под атмосферным давлением водой, припишем ему в этом состоянии значение температуры, равное  $100^\circ$ , и определим соответствующий объем  $V_{100}$ . Принимая, что выбранный нами температурный признак (в рассматриваемом примере — объем) изменяется с температурой линейно, состоянию, в котором термометрическое тело имеет объем  $V$ , следует приписать температуру

$$t^\circ = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} 100^\circ. \quad (97.1)$$

Установленная таким образом температурная шкала называется, как известно, шкалой Цельсия. Соотношение, аналогичное (97.1), можно написать и для случая, когда для измерения температуры берется не объем, а какой-либо иной температурный признак.

Проградуировав описанным способом термометр, его можно использовать для измерения температуры, приводя в тепловое равновесие с тем телом, температура которого нас интересует, и производя отсчет величины объема.

При сравнении термометров, использующих различные по природе термометрические тела (например, ртуть и спирт) или различные температурные признаки (например, объем и электрическое сопротивление), обнаруживается, что показания этих термометров, совпадая из-за способа градуировки при  $0^\circ$  и  $100^\circ$ , не совпадают при других температурах. Отсюда следует, что для однозначного определения температурной шкалы необходимо условиться, кроме способа градуировки, также о выборе термометрического тела и температурного признака. О том, как делается этот выбор при установлении так называемой эмпирической шкалы температур, будет сказано в следующем параграфе. Забегая вперед, укажем, что на основе второго начала термодинамики может быть установлена температурная шкала, не зависящая от свойств термометрического тела (см. § 130). Эта шкала называется абсолютной шкалой температур.

## § 98. Уравнение состояния идеального газа

Состояние некоторой массы газа определяется значениями трех параметров: давления  $p$ , объема  $V$  и температуры  $t^\circ$ . Эти параметры закономерно связаны друг с другом, так что изменение одного из них влечет за собой изменение других. Указанная связь может быть задана аналитически в виде функции

$$F(p, V, t^\circ) = 0. \quad (98.1)$$

Соотношение, дающее связь между параметрами какого-либо тела, называется уравнением состояния этого тела. Следовательно, (98.1) представляет собой уравнение состояния данной массы газа.

Если разрешить (98.1) относительно какого-либо из параметров, например  $p$ , уравнение состояния примет вид

$$p = f(V, t^\circ). \quad (98.2)$$

Известные из школьного курса законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака дают уравнения состояния для случаев, когда один из параметров остается постоянным. Так, например, закон Бойля — Мариотта гласит, что для данной массы газа при постоянной температуре

давление газа изменяется обратно пропорционально его объему. Аналитически это можно записать следующим образом:

$$pV = \text{const} \quad (t^\circ = \text{const}). \quad (98.3)$$

Совокупность состояний, отвечающих одной и той же температуре, изобразится на диаграмме  $(p, V)$  кривой, определяемой уравнением (98.3), т. е. гиперболой. Каждому значению температуры соответствует своя кривая (рис. 216, а). Эти кривые называются изотермами («изо» — одинаковый, равный).

Переход газа из одного состояния в другое, совершающийся при постоянной температуре, называется

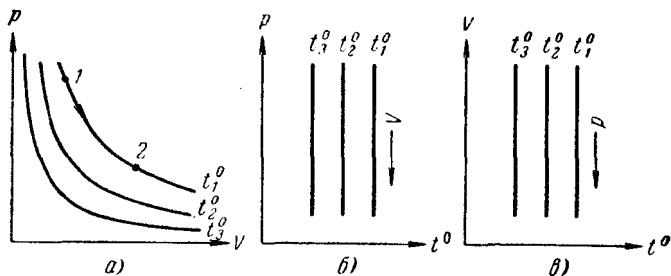


Рис. 216.

изотермическим процессом. При изотермическом процессе точка, изображающая состояние газа, перемещается по изотерме.

На диаграмме  $(p, t^\circ)$  или  $(V, t^\circ)$  изотермический процесс изображается прямой, параллельной оси  $p$  (соответственно  $V$ ). Эти прямые также будут изотермами. Третий параметр  $V$  (соответственно  $p$ ) не сохраняет вдоль этих прямых постоянного значения, возрастая при перемещении по прямой в указанном стрелкой направлении (рис. 216, б и в).

Закон Гей-Люссака гласит, что при неизменном давлении объем данной массы газа меняется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ) \quad (p = \text{const}). \quad (98.4)$$

Аналогичная зависимость имеется для давления при постоянном объеме:

$$p = p_0(1 + \alpha t^\circ) \quad (V = \text{const}). \quad (98.5)$$

В этих уравнениях  $t^\circ$  — температура по шкале Цельсия,  $V_0$  — объем при  $0^\circ \text{C}$ ,  $p_0$  — давление при  $0^\circ \text{C}$ . Коэффициент  $\alpha$  в обоих уравнениях одинаков и имеет значение  $1/273 \text{ 1/град}^1$ .

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется изобарическим. Для газа такой процесс изобразится на диаграмме  $(V, t^\circ)$  прямой (98.4) (рис. 217, а; различные прямые отвечают разным давлениям). Эта прямая называется изобарой. Отметим, что на диаграмме  $(p, t^\circ)$  или  $(p, V)$  изобара имеет вид прямой, параллельной оси  $t^\circ$  или соответственно оси  $V$ .

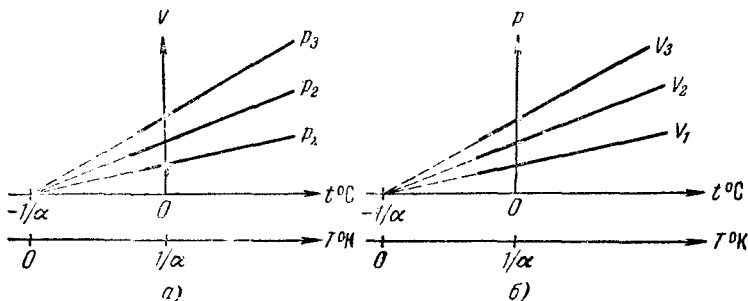


Рис. 217.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется изохорическим. На диаграмме  $(p, t^\circ)$  изохоры имеют вид, показанный на рис. 217, б.

Заметим, что, как следует из (98.4) и (98.5), все изобары и все изохоры пересекают ось  $t^\circ$  в одной и той же точке, определяемой из условия

$$1 + \alpha t^\circ = 0,$$

откуда

$$t^\circ = -\frac{1}{\alpha} = -273,15^\circ \text{C}.$$

Сместив начало отсчета температур в эту точку, мы перейдем от шкалы температур по Цельсию к другой температурной шкале, которая называется абсолютной (или шкалой Кельвина<sup>2)</sup>). Как мы увидим в дальнейшем, абсолютная температура (т. е. температура, от-

1) Точнее,  $1/273,15 \text{ град}^{-1}$ .

2) Соответственно градус этой шкалы обозначается  $^\circ\text{K}$ .

считанная по абсолютной шкале) имеет глубокий физический смысл.

В соответствии с определением абсолютной шкалы, между абсолютной температурой (мы будем обозначать эту температуру буквой  $T$ ) и температурой по Цельсию  $t^\circ$  имеется следующее соотношение:

$$T = t^\circ + \frac{1}{\alpha} = t^\circ + 273,15. \quad (98.6)$$

Так, например, температуре  $0^\circ \text{C}$  соответствует  $273,15^\circ \text{K}$ . Температура, равная  $0^\circ \text{K}$ , называется абсолютным нулем, ему соответствует  $-273,15^\circ \text{C}$ .

Перейдем в уравнениях (98.4) и (98.5) от температуры по Цельсию к абсолютной температуре. Для этого в соответствии с (98.6) нужно вместо  $t^\circ$  подставить  $T - 1/\alpha$ .

$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ) = V_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = \alpha V_0 T \quad (98.7)$$

и аналогично:

$$p = \alpha p_0 T. \quad (98.8)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (p = \text{const}), \quad (98.9)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (V = \text{const}), \quad (98.10)$$

где индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной и той же изобаре [в случае (98.9)] или на одной и той же изохоре [в случае (98.10)].

Законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака являются приближенными. Всякий реальный газ тем точнее следует уравнениям (98.3), (98.9) и (98.10), чем меньше его плотность, т. е. чем больший объем он занимает. В соответствии с (98.3) объем растет с уменьшением давления, а согласно (98.9) объем возрастает с температурой. Следовательно, законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака справедливы при не слишком низких температурах и невысоких давлениях.

Газ, который точно следует уравнениям (98.3), (98.9) и (98.10), называется идеальным. Идеальный

газ представляет собой абстракцию. Всякий реальный газ по мере убывания его плотности все больше приближается по свойствам к идеальному.

Некоторые газы, такие, как воздух, азот, кислород, при комнатной температуре и атмосферном давлении весьма близки к идеальному газу. Особенно близки по своим свойствам к идеальному газу гелий и водород.

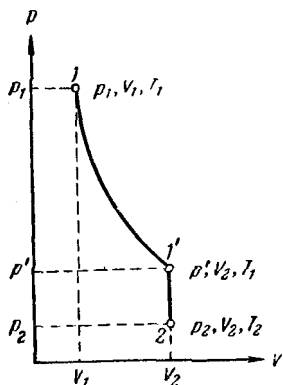


Рис. 218.

Объединив уравнения Бойля—Марриотта и Гей-Люссака, можно найти уравнение состояния идеального газа. Для этого возьмем на диаграмме  $(p, V)$  два произвольных состояния, определяемых значениями параметров  $p_1, V_1, T_1$  и  $p_2, V_2, T_2$  (рис. 218). Рассмотрим процесс перехода из 1 в 2, состоящий из изотермы  $1—1'$  и изохоры  $1'—2$ . Температура состояния  $1'$ , очевидно, совпадает с температурой состоя-

ния 1, а объем в  $1'$  равен объему в состоянии 2. Давление  $p'$ , вообще говоря, отлично от  $p_1$  и  $p_2$ .

Состояния 1 и  $1'$  лежат на одной изотерме. Поэтому в соответствии с (98.3)

$$p_1 V_1 = p' V_2,$$

Состояния  $1'$  и 2 лежат на одной изохоре. Следовательно, согласно (98.10)

$$\frac{p'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Исключая из этих уравнений  $p'$ , получим:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Поскольку состояния 1 и 2 были взяты совершенно произвольно, можно утверждать, что для любого состояния

$$\frac{pV}{T} = B, \quad (98.11)$$

где  $B$  — постоянная для данной массы газа величина,

В соответствии с законом, установленным Авогадро, килограмм-молекулы всех газов занимают при одинаковых условиях (т. е. при одинаковых температуре и давлении) одинаковый объем. В частности, при так называемых нормальных условиях, т. е. при  $0^\circ\text{C}$  и давлении, равном  $1\text{ атм}$ , объем киломоля любого газа равен  $22,4\text{ м}^3/\text{кмоль}$ <sup>1)</sup>. Отсюда следует, что в случае, когда количество газа равно одному киломолю, величина  $B$  в (98.11) будет одинакова для всех газов. Обозначив соответствующую киломолю величину  $B$  буквой  $R$ , а объем киломоля  $V_{\text{км}}$ , уравнение (98.11) можно записать следующим образом:

$$\frac{pV_{\text{км}}}{T} = R. \quad (98.12)$$

Это уравнение называют уравнением Клапейрона. Оно связывает параметры киломоля идеального газа и, следовательно, представляет собой уравнение состояния идеального газа. Его обычно пишут в виде

$$pV_{\text{км}} = RT. \quad (98.13)$$

Величина  $R$  называется универсальной газовой постоянной. Ее значение можно вычислить на основании закона Авогадро, подставив в (98.12)  $p$ , равное  $1,01 \cdot 10^5\text{ н/м}^2$  ( $1\text{ атм}$ ),  $V_{\text{км}}$ , равный  $22,4\text{ м}^3/\text{кмоль}$ , и  $T$ , равную  $273^\circ\text{K}$ :

$$R = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 22,4}{273} \frac{(\text{н/м}^2) \cdot \text{м}^3}{\text{град} \cdot \text{кмоль}} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{дж}}{\text{град} \cdot \text{кмоль}}.$$

Объем моля газа при нормальных условиях равен  $22,4\text{ л/моль}$ . Перейдя от киломоля газа к молю и от джоулей к эргам и калориям, легко получить для универсальной газовой постоянной следующие значения:

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{град} \cdot \text{моль}} = 1,99 \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}}.$$

<sup>1)</sup> Заметим, что при нормальных условиях в  $1\text{ м}^3$  будет находиться

$$L = \frac{6,06 \cdot 10^{26}}{22,4} = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ молекул,}$$

а в  $1\text{ см}^3$

$$L' = 2,68 \cdot 10^{19} \text{ молекул.}$$

Число  $L$  (или  $L'$ ) называется числом Лошмидта.

Иногда  $R$  выражают в литро-атмосферах на градус, на моль:

$$R = \frac{1 \text{ атм} \cdot 22,4 \text{ л/моль}}{273 \text{ град}} = 0,0820 \frac{\text{л} \cdot \text{атм}}{\text{град} \cdot \text{моль}}.$$

От уравнения для одного киломоля легко перейти к уравнению для любой массы газа  $m$ , приняв во внимание, что при одинаковых давлении и температуре  $z$  киломолей газа будут занимать в  $z$  раз больший объем, чем один киломоль:  $V = zV_{\text{км}}$ . Умножив (98.13) на  $z = m/\mu$  ( $m$  — масса газа,  $\mu$  — масса киломоля) и заменив  $zV_{\text{км}}$  через  $V$ , получаем:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (98.14)$$

Это и есть уравнение состояния идеального газа, написанное для любой массы газа  $m$ . Легко видеть, что из этого уравнения вытекают уравнения (98.3), (98.9) и (98.10).

Простая связь между температурой и остальными параметрами идеального газа делает заманчивым использование его в качестве термометрического вещества. Обеспечив постоянство объема и использовав в качестве температурного признака давление газа, можно получить термометр с идеально линейной температурной шкалой. В дальнейшем эту шкалу мы будем называть идеальной газовой шкалой температур.

Практически, по международному соглашению, в качестве термометрического тела берется водород. Установленная по водороду с использованием уравнения (98.14) шкала называется эмпирической шкалой температур.



## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

Наибольших успехов достигла молекулярно-кинетическая теория в объяснении самого простого — газообразного состояния вещества. Даже в своем наиболее элементарном виде, с использованием целого ряда упрощающих предположений, кинетической теории удастся дать не только качественное, но и количественное (с точностью до числового множителя порядка единицы) объяснение основных свойств газообразного состояния и происходящих в газах явлений.

Первая задача, которую мы поставим, заключается в вычислении величины давления газа на стенки сосуда. Решение этой задачи прольет свет на физическую природу абсолютной температуры.

## § 99. Уравнение кинетической теории газов для давления

Простейшая молекулярно-кинетическая модель газа выглядит следующим образом. Газ — это совокупность одинаковых, хаотически движущихся, не взаимодействующих друг с другом на расстоянии молекул. Размеры молекул столь малы, что суммарным объемом их можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда. Подавляющую часть времени каждая молекула движется свободно, претерпевая иногда упругие соударения с другими молекулами или со стенками сосуда.

Такая модель представляет собой не что иное, как идеальный газ. У реальных газов молекулы обладают конечными размерами и взаимодействуют друг с другом с силами, быстро убывающими с увеличением

расстояния между молекулами. Однако по мере уменьшения плотности газа собственный объем молекул делается все меньше по сравнению с объемом, занимаемым газом, а средние расстояния между молекулами становятся настолько большими, что силами взаимодействия молекул друг с другом можно вполне пренебречь. Следовательно, при условиях, когда всякий газ бывает близок к идеальному, справедливы допущения, положенные нами в основу описанной выше модели.

При ударе о стенку сосуда молекула сообщает ей импульс, численно равный изменению импульса молекулы. Каждый элемент поверхности стенки  $\Delta S$  непрерывно подвергается бомбардировке большим количеством молекул, в результате чего за время  $\Delta t$  получает суммарный импульс  $\Delta K$ , направленный по нормали к  $\Delta S$ . Отношение  $\Delta K$  к  $\Delta t$  дает, как известно из механики, силу, действующую на  $\Delta S$ , а отношение этой силы к  $\Delta S$  даст давление  $p$ .

Молекулы движутся совершенно беспорядочно, хаотически; все направления движения равновероятны, ни одному из них не может быть отдано предпочтение перед другими. Основанием для такого утверждения служит то обстоятельство, что давление газа на стенки сосуда всюду одинаково. Если бы движение молекул в каком-то направлении преобладало, давление газа на участок стенки, лежащий в этом направлении, было бы, естественно, больше.

Скорости молекул могут быть самыми различными по величине. Более того, скорость молекулы должна меняться, вообще говоря, при каждом соударении<sup>1)</sup>, причем с равной вероятностью она может как возрасти, так и уменьшиться. Это следует из того, что суммарная кинетическая энергия двух молекул до и после их соударения должна быть одинакова. Следовательно, возрастание скорости одной молекулы должно сопровождаться одновременным уменьшением скорости другой.

Для облегчения решения поставленной задачи мы введем некоторые упрощения, касающиеся характера движения молекул. Во-первых, будем полагать молекулы движущимися только вдоль трех взаимно перпен-

---

<sup>1)</sup> Напомним, что при упругом центральном соударении двух шаров равной массы шары обмениваются скоростями.

дикулярных направлений. Если газ содержит  $N$  молекул, то в любой момент времени вдоль каждого из направлений будет двигаться  $N/3$  молекул, причем половина из них (т. е.  $N/6$ ) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина в противоположную (рис. 219). Основываясь на таком предположении, мы будем считать, что в интересующем нас направлении (например, по нормали к данному элементу стенки  $\Delta S$ ) движется  $1/6$  часть молекул.

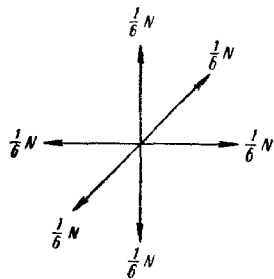


Рис. 219.

Второе упрощение состоит в том, что всем молекулам мы припишем одинаковое значение скорости  $v$ .

Первое упрощение не влияет, как мы покажем в следующем параграфе, на конечный результат вычисления давления; уточнения, к которым приводит отказ от второго упрощения, будут выяснены в этом параграфе.

Вычислим импульс, сообщаемый стенке сосуда ударяющейся о нее молекулой. До удара о стенку импульс молекулы направлен по внешней нормали к  $\Delta S$  (рис. 220) и равен  $mv$ . В результате удара импульс меняет знак. Таким образом, приращение импульса молекулы оказывается равным

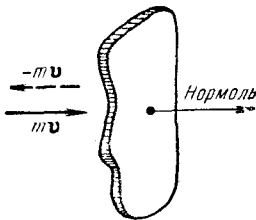


Рис. 220.

$$(-mv) - (mv) = -2mv. \quad (99.1)$$

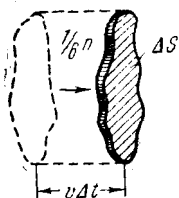
По третьему закону Ньютона стенка получает при ударе импульс  $2mv$ , имеющий направление нормали.

За время  $\Delta t$  до элемента стенки  $\Delta S$  долетят все движущиеся по направлению к нему молекулы, заключенные в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $v \Delta t$  (рис. 221). Число этих молекул равно

$$\Delta N = \frac{1}{6} n v \Delta S \Delta t, \quad (99.2)$$

где  $n$  — число молекул в единице объема.

Можно, правда, возразить, что часть этих молекул на своем пути к стенке претерпит столкновения с другими молекулами, вследствие чего изменит направление своего движения и не достигнет  $\Delta S$ . Однако соударения не нарушают хаотического характера движения молекул: переход некоторого количества молекул из группы, движущейся по направлению к стенке, в группы, движущиеся в других направлениях, сопровождается одновременным переходом такого же числа молекул из других групп в группу, движущуюся по направлению к стенке. Поэтому при вычислении количества молекул, долетающих до стенки, соударения молекул друг с другом можно не принимать во внимание. В соответствии с (99.2) число ударов молекул о площадку  $\Delta S$  за единицу времени будет равно



$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6} n v \Delta S,$$

а число ударов о единичную площадку ( $\Delta S = 1 \text{ м}^2$ ) за секунду

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n v, \quad (99.3)$$

Рис. 221.

Умножив число ударов (99.2) на импульс (99.1), сообщаемый стенке при каждом ударе, получим суммарный импульс  $\Delta K$ , сообщаемый элементу стенки  $\Delta S$  за время  $\Delta t$ :

$$\Delta K = 2 m v \frac{1}{6} n v \Delta S \Delta t = \frac{1}{3} n m v^2 \Delta S \Delta t.$$

Отнеся импульс  $\Delta K$  к промежутку времени  $\Delta t$ , получим силу, действующую на  $\Delta S$ . Наконец, отнеся полученную силу к площадке  $\Delta S$ , получим давление газа, оказываемое им на стенки сосуда. Следовательно,

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} n m v^2. \quad (99.4)$$

Учитывая, что  $\epsilon = m v^2 / 2$  представляет собой кинетическую энергию поступательного движения молекулы, выражению для давления можно придать следующий вид:

$$p = \frac{2}{3} n \epsilon. \quad (99.5)$$

Прежде чем приступить к анализу полученных формул, выясним, как повлияет на их вид отказ от предположения о равенстве скоростей всех молекул.

Пусть скорости молекул различны, причем из  $n$  молекул, содержащихся в единице объема,  $n_1$  молекул имеют скорости, практически равные  $v_1$ ,  $n_2$  молекул имеют скорость  $v_2$  и вообще  $n_i$  молекул имеют скорость  $v_i$ . Очевидно, что

$$n_1 + n_2 + \dots + n_i + \dots = \sum n_i = n.$$

Зная распределение молекул по скоростям, можно найти среднее значение скорости молекул. Для этого нужно сложить скорости всех  $n$  молекул и разделить полученный результат на  $n$ :

$$\bar{v} = \frac{\overbrace{v_1 + v_1 + \dots + v_1}^{n_1} + \overbrace{v_2 + v_2 + \dots + v_2}^{n_2} + \dots + \overbrace{v_i + v_i + \dots + v_i}^{n_i} + \dots}{n}.$$

При этом мы должны взять  $v_1$  слагаемым  $n_1$  раз,  $v_2$  — слагаемым  $n_2$  раз и т. д. Следовательно,  $\bar{v}$  можно записать в виде

$$\bar{v} = \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_i v_i + \dots}{n} = \frac{1}{n} \sum n_i v_i. \quad (99.6)$$

Проведя аналогичные рассуждения для кинетической энергии поступательного движения молекулы  $\epsilon$ , найдем для среднего значения этой энергии следующее выражение:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{n} \sum n'_i \epsilon_i, \quad (99.7)$$

где  $n'_i$  — число молекул, обладающих энергией, практически равной  $\epsilon_i$ .

Заметим, что согласно (99.7) суммарная кинетическая энергия молекул, содержащихся в единице объема, равна  $n\bar{\epsilon}$  — произведению числа молекул в единице объема на среднюю энергию одной молекулы, причем этот результат не зависит от конкретного вида распределения молекул по скоростям.

Полагая, что молекулы каким-то образом распределены по скоростям, определим число ударов молекул о стенку сосуда. Среди молекул, обладающих значением скорости  $v_i$ , имеются молекулы, движущиеся в самых

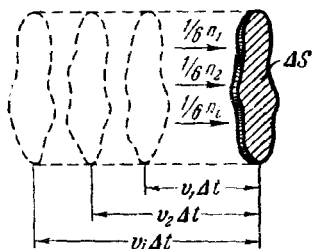
различных направлениях. Поэтому можно упрощенно считать, что по направлению к элементу стенки  $\Delta S$  движется  $1/6$  часть таких молекул. Следовательно, из числа молекул, имеющих скорость  $v_i$ , достигает элемента  $\Delta S$  (рис. 222) за время  $\Delta t$

$$\Delta N_i = \frac{1}{6} n_i v_i \Delta S \Delta t. \quad (99.8)$$

А полное число ударов молекул любых скоростей

$$\Delta N = \sum \Delta N_i = \frac{1}{6} \Delta S \Delta t \sum n_i v_i.$$

Заменяя  $\sum n_i v_i$  в соответствии с (99.6) через  $n\bar{v}$ , получим для числа ударов об единичную площадку в единицу времени следующее выражение:



$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} \quad (99.9)$$

Это выражение отличается от полученного нами ранее (99.3) только тем, что вместо одинаковой для всех молекул скорости  $v$  в него входит средняя скорость молекул  $\bar{v}$ .

Каждая из  $\Delta N_i$  молекул [см. (99.8)] при ударе о стенку сообщает ей импульс  $2mv_i$ . Суммарный импульс, сообщаемый  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  молекулами всех скоростей, равен

$$\Delta K = \sum 2mv_i \Delta N_i = \sum 2mv_i \frac{1}{6} n_i v_i \Delta S \Delta t.$$

Чтобы получить давление, нужно  $\Delta K$  разделить на  $\Delta S$  и  $\Delta t$ :

$$p = \frac{2}{3} \sum n_i \frac{mv_i^2}{2} = \frac{2}{3} \sum n_i \epsilon_i,$$

где  $\epsilon_i = mv_i^2/2$  — кинетическая энергия поступательного движения молекулы, имеющей скорость  $v_i$ .

<sup>1)</sup> Эта формула является приближенной. Более строгий расчет (см. следующий параграф) приводит к формуле

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} n \bar{v}.$$

Заменяя в соответствии с (99.7)  $\sum n_i \epsilon_i$  через  $n\bar{\epsilon}$ , получим:

$$p = \frac{2}{3} n\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} n \frac{\overline{mv^2}}{2}. \quad (99.10)$$

Это выражение отличается от ранее полученного выражения (99.5) тем, что вместо одинаковой для всех молекул энергии  $\epsilon$  в него входит средняя энергия  $\bar{\epsilon}$ .

Уравнение (99.10) является основным в кинетической теории газов. Согласно этому уравнению *давление равно двум третям кинетической энергии поступательного движения молекул, заключенных в единице объема.*

Из (99.10) следует, что при постоянном  $n$  (т. е. при неизменном объеме данной массы газа) давление пропорционально средней кинетической энергии поступательного движения молекулы  $\bar{\epsilon}$ . Вместе с тем мы видели в предыдущем параграфе, что температура  $T$ , измеренная по идеальной газовой шкале, определяется как величина, пропорциональная давлению идеального газа при постоянном объеме. Отсюда следует вывод, что температура  $T$  пропорциональна  $\bar{\epsilon}$ . Чтобы найти коэффициент пропорциональности между абсолютной температурой  $T$  и  $\bar{\epsilon}$ , сопоставим уравнение (99.10) с уравнением состояния идеального газа (98.13). Для этого умножим уравнение (99.10) на объем киломоля  $V_{\text{км}}$ :

$$pV_{\text{км}} = \frac{2}{3} (nV_{\text{км}}) \bar{\epsilon}.$$

Замечая, что произведение числа молекул в единице объема на объем одного киломоля равно числу Авогадро, последнее равенство можно написать в виде:

$$pV_{\text{км}} = \frac{2}{3} N_{\text{Л}} \bar{\epsilon}.$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением состояния идеального газа для одного киломоля  $pV_{\text{км}} = RT$ , мы заключаем, что

$$\frac{2}{3} N_{\text{Л}} \bar{\epsilon} = RT,$$

откуда

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT, \quad (99.11)$$

где буквой  $k$  обозначена величина  $R/N_A$ , называемая постоянной Больцмана. Ее значение равно

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \cdot 10^3}{6,02 \cdot 10^{26}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{град}} = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{град}}.$$

Итак, мы пришли к важному выводу: абсолютная температура есть величина, пропорциональная средней энергии движения одной молекулы. Этот вывод справедлив не только для газов, но и для вещества в любом состоянии.

Выражение (99.11) замечательно в том отношении, что средняя энергия  $\bar{\epsilon}$  оказывается зависящей только от температуры и не зависит от массы молекулы.

Заменив в уравнении состояния идеального газа  $R$  через  $N_A k$  и учитывая, что  $N_A/V_{\text{км}}$  равно  $n$ , можно получить важную формулу:

$$p = nkT. \quad (99.12)$$

Если имеется смесь нескольких газов, разные по массе молекулы будут иметь различную среднюю скорость, но средняя энергия молекул будет одна и та же. Давление в этом случае будет равно

$$p = nkT = (n_1 + n_2 + \dots) kT, \quad (99.13)$$

где  $n_1$ ,  $n_2$  и т. д. обозначают количество молекул первого, второго и т. д. сорта, содержащееся в единице объема. Выражение (99.13) может быть представлено в виде

$$p = n_1 kT + n_2 kT + \dots$$

Но  $n_1 kT$  — это то давление  $p_1$ , которое было бы в сосуде, если в нем находились бы только молекулы первого сорта,  $n_2 kT$  — то давление  $p_2$ , которое было бы при наличии в сосуде только молекул второго сорта, и т. д. Давление, обусловленное молекулами какого-либо одного сорта, при условии, что они одни присутствуют в сосуде в том количестве, в каком они содержатся в смеси, называется парциальным давлением соответствующей компоненты газовой смеси. Введя парциальные давления, на основании (99.13) можно написать, что

$$p = p_1 + p_2 + \dots = \sum p_i. \quad (99.14)$$



Таким образом, мы пришли к закону Дальтона, который гласит, что *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений газов, образующих смесь.*

## § 100. Строгий учет распределения скоростей молекул по направлениям

В этом параграфе мы произведем точный подсчет числа ударов молекул о стенку, не прибегая к упрощенному представлению о движении только вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. Кроме того, мы покажем, что указанное упрощение не отражается на полученном нами в предыдущем параграфе выражении (99.4) для давления.

Любое направление в пространстве можно задать в виде отложенного из некоторой точки  $O$  направленного отрезка  $OA$  (рис. 223). Проведем через точку  $O$  ось  $Z$  и проходящую через эту ось плоскость  $P_0$ . Проходящая через ось  $OZ$  плоскость  $P$ , в которой лежит направление  $OA$ , образует с выбранной за начало отсчета плоскостью  $P_0$  угол  $\varphi$ . Направление  $OA$  образует с осью  $OZ$  угол  $\vartheta$ . Очевидно, что задание углов  $\vartheta$  и  $\varphi$  полностью определяет направление  $OA$ . Для различных направлений угол  $\varphi$  изменяется в пределах от  $0$  до  $2\pi$ , угол  $\vartheta$  — от  $0$  до  $\pi$ .

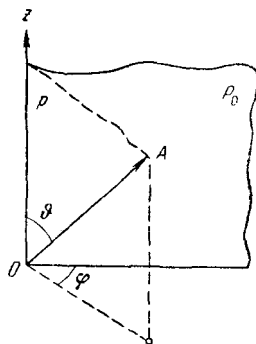


Рис. 223.

Таким образом, направление движения молекул газа можно охарактеризовать, задав для каждой молекулы значения углов  $\vartheta$  и  $\varphi$ , отсчитываемых от некоторого фиксированного направления  $OZ$  (в качестве такого направления можно взять, например, направление нормали к площадке) и проведенной через него плоскости  $P_0$ .

Однако можно применить иной, более наглядный способ. Окружим точку  $O$  сферой произвольного радиуса  $R$  (рис. 224). Любая точка  $A$  на этой сфере будет определять некоторое направление от  $O$  к  $A$ . Следовательно, направления, в которых движутся молекулы газа, могут быть заданы точками на сфере.

Равновероятность всех направлений приводит к тому, что точки, изображающие направления движения молекул, распределяются по сфере с постоянной плотностью  $\rho$ , равной числу рассматриваемых молекул  $N$ , деленному на поверхность сферы:

$$\rho = \frac{N}{4\pi R^2}. \quad (100.1)$$

Соударения приводят к изменению направлений движения молекул, в результате чего положения  $N$  точек на сфере непрерывно меняются. Однако вследствие хаотичности движения плотность точек остается все время постоянной.

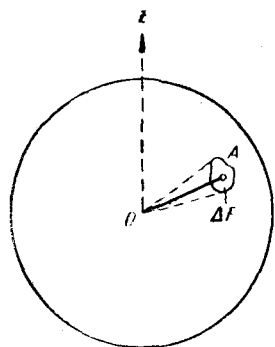


Рис. 224.

Число возможных направлений в пространстве, как легко видеть, бесконечно велико. Реализуется же в каждый момент времени конечное число направлений, равное рассматриваемому количеству молекул  $N$ . Отсюда следует, что постановка вопроса о числе молекул, имеющих заданное (изображаемое точкой  $A$  на сфере или определяемое значениями углов  $\theta$  и  $\varphi$ ) направление движения, лишена смысла. В самом деле, поскольку число возможных направлений бесконечно велико, а число молекул конечно, вероятность того, что в строго определенном направлении летит хотя бы одна молекула, равна нулю.

Правомерной будет постановка вопроса о том, какое количество молекул движется в направлениях, близких к данному (определяемому углами  $\theta$  и  $\varphi$ ). Таким направлениям соответствуют все точки элемента поверхности сферы  $\Delta F$ , взятого в окрестности точки  $A$  (рис. 224). Поскольку точки, изображающие направления движения молекул, распределены по сфере равномерно, в пределах  $\Delta F$  окажется количество точек, равное

$$\Delta N_{\theta, \varphi} = \rho \Delta F = N \frac{\Delta F}{4\pi R^2}. \quad (100.2)$$

Индексы  $\theta, \varphi$  при  $\Delta N$  указывают на то, что имеются в виду молекулы, направления движения которых близки

направлению, определяемому углами  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Введя телесный угол  $\Delta\Omega = \Delta F/R^2$ , в пределах которого заключены направления, проходящие через  $\Delta F$ , формулу (100.2) можно записать следующим образом:

$$\Delta N_{\vartheta, \varphi} = N \frac{\Delta\Omega}{4\pi}. \quad (100.3)$$

Условия соударения молекул со стенкой (в частности, импульс, сообщаемый стенке при ударе) зависят только от угла  $\vartheta$  между направлением движения молекул и нормалью к элементу стенки  $\Delta S$  и не зависят от угла  $\varphi$ . Найдем, какое количество молекул  $dn_{\vartheta}$  из  $n$  молекул, находящихся в единице объема, имеют направления, образующие с нормалью углы, заключенные в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ . Для этого согласно (100.2) нужно найти элемент поверхности сферы  $dF$ , соответствующий таким значениям  $\vartheta$ . Этот элемент поверхности, как видно из рис. 225, представляет собой шаровой пояс с длиной основания, равной  $2\pi R \sin \vartheta$ , и шириной  $R d\vartheta$ . Поверхность такого пояса равна

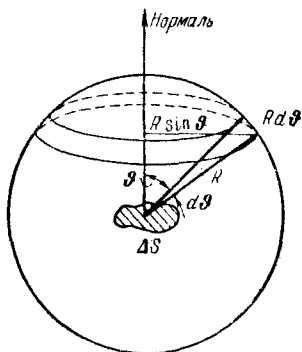


Рис. 225.

$$dF_{\vartheta} = 2\pi R \sin \vartheta R d\vartheta = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Следовательно, в соответствии с (100.2) получаем:

$$dn_{\vartheta} = n \frac{2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} n \sin \vartheta d\vartheta. \quad (100.4)$$

Множитель  $\frac{1}{2} \sin \vartheta$  характеризует распределение молекул по значениям угла  $\vartheta$ . Если сравнивать количества молекул  $dn_{\vartheta}$ , приходящиеся на один и тот же интервал углов  $d\vartheta$ , но отличающиеся значением  $\vartheta$ , то такие  $dn_{\vartheta}$  изменяются как  $\sin \vartheta$ .

Теперь найдем число ударов молекул о площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$ . Из числа молекул, направления движения которых образуют с нормалью к  $\Delta S$  углы в пределах от  $\vartheta$  до  $\vartheta + d\vartheta$ , до  $\Delta S$  долетят за время  $\Delta t$  все  $dN_{\vartheta}$

молекул, находящиеся в объеме  $\Delta V$  показанного на рис. 226 наклонного цилиндра<sup>1)</sup>; объем  $\Delta V$  равен

$$\Delta V = \Delta S v \Delta t \cos \theta,$$

где  $v$  — скорость, предполагаемая одинаковой для всех молекул.

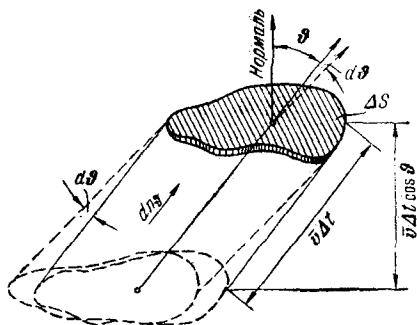


Рис. 226.

Число интересующих нас молекул, содержащихся в единице объема, определяется формулой (100.4). Поэтому

$$dN_{\theta} = dn_0 \Delta V = \frac{1}{2} n \sin \theta d\theta \Delta S v \Delta t \cos \theta. \quad (100.5)$$

Проинтегрировав это выражение по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ <sup>2)</sup>, получим полное число ударов о площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$ :

$$\Delta N = \int dN_{\theta} = \frac{1}{2} n v \Delta S \Delta t \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} n v \Delta S \Delta t.$$

Отсюда для числа ударов об единичную площадку в единицу времени получим следующее выражение:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} n v, \quad (100.6)$$

<sup>1)</sup> Все направления с данным  $\theta$  мы мысленно сводим в одну плоскость, отвечающую произвольному значению угла  $\varphi$ .

<sup>2)</sup> Значениям  $\theta$  от  $\pi/2$  до  $\pi$  соответствуют молекулы, летящие в направлениях от  $\Delta S$ .

которое отличается от полученного нами в предыдущем параграфе выражения (99.3) только числовым множителем, равным  $3/2$ .

Перейдем к вычислению давления газа на стенку. Каждая молекула, ударяющаяся о стенку под углом  $\vartheta$ , сообщает ей направленный по нормали импульс, равный  $2mv \cos \vartheta$  (рис. 227). За время  $\Delta t$  об элемент стенки  $\Delta S$  ударяется под углом  $\vartheta$  количество молекул  $dN_\vartheta$ , определяемое формулой (100.5). Следовательно, импульс, сообщаемый  $\Delta S$  этими молекулами, равен

$$dK_\vartheta = 2mv \cos \vartheta dN_\vartheta = nmv^2 \Delta S \Delta t \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Полный импульс  $\Delta K$ , сообщаемый  $\Delta S$  молекулами всех направлений, получим путем интегрирования:

$$\Delta K = \int dK_\vartheta = nmv^2 \Delta S \Delta t \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} nmv^2 \Delta S \Delta t.$$

Отсюда давление

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} nmv^2. \quad (100.7)$$

Выражение (100.7) совпадает с выражением для давления (99.4), полученным нами на основании предположения о движении молекул только в трех взаимно-перпендикулярных направлениях. Совпадение объясняется тем, что указанное предположение приводит, с одной стороны, к занижению числа ударов молекул о стенку [сравни (100.6) и (99.3)], а с другой, — к завышению импульса, передаваемого стенке при каждом ударе. При выводе формулы (99.4) мы принимали, что при каждом ударе стенке сообщается импульс, равный  $2mv$ . В действительности же величина сообщаемого стенке импульса зависит от угла  $\vartheta$ , вследствие чего средний импульс, сообщаемый при одном ударе, равен  $\frac{4}{3} mv$ . В итоге обе неточности взаимно компенсируют друг друга и даже при упрощенном рассмотрении получается точное выражение для давления.

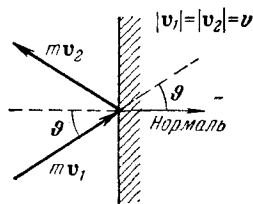


Рис. 227.

## § 101. Равнораспределение энергии по степеням свободы

Полученное нами в § 99 выражение для средней энергии молекулы

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT \quad (101.1)$$

учитывает только энергию поступательного движения молекулы. Однако наряду с поступательным движением возможны также вращение молекулы и колебания атомов, входящих в состав молекулы. Оба эти вида движения связаны с некоторым запасом энергии, определить который позволяет устанавливаемое статистической физикой положение о равнораспределении энергии по степеням свободы молекулы.

Число степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы. Так, положение в пространстве материальной точки полностью определяется заданием значений трех ее координат (например, декартовых координат  $x, y, z$  или сферических координат  $r, \vartheta, \varphi$  и т. д.). В соответствии с этим материальная точка имеет три степени свободы.

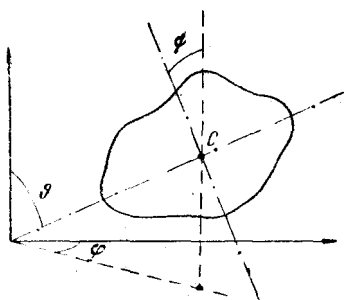


Рис. 228.

Положение абсолютно твердого тела можно определить, задав три координаты его центра инерции  $(x, y, z)$ , два угла  $\vartheta$  и  $\varphi$ , указывающих направление какой-либо оси, связанной с телом и проходящей через его центр инерции (рис. 228), и, наконец, угол  $\psi$ , определяющий направление второй связанной с телом оси, перпендикулярной к первой. Таким образом, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Изменение координат центра инерции при неизменных углах  $\vartheta, \varphi$  и  $\psi$  обуславливается поступательным движением твердого тела. Поэтому соответствующие степени свободы называются поступательными. Изменение любого из углов  $\vartheta, \varphi, \psi$  при неизменном положении центра инерции обуславливается вращением тела, в связи с чем соответ-

его центр инерции (рис. 228), и, наконец, угол  $\psi$ , определяющий направление второй связанной с телом оси, перпендикулярной к первой. Таким образом, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Изменение координат центра инерции при неизменных углах  $\vartheta, \varphi$  и  $\psi$  обуславливается поступательным движением твердого тела. Поэтому соответствующие степени свободы называются поступательными. Изменение любого из углов  $\vartheta, \varphi, \psi$  при неизменном положении центра инерции обуславливается вращением тела, в связи с чем соответ-

ствующие степени свободы называются вращательными. Следовательно, из шести степеней свободы абсолютно твердого тела три являются поступательными и три — вращательными.

Система из  $N$  материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет  $3N$  степеней свободы (положение каждой из  $N$  точек должно быть задано тремя координатами). Любая жесткая связь, устанавливающая неизменное взаимное расположение двух точек, уменьшает число степеней свободы на единицу. Так, например, если система состоит из двух материальных точек, расстояние  $l$  между которыми остается постоянным (рис. 229), то число степеней свободы системы равно пяти. В самом деле, в этом случае между координатами точек имеется соотношение

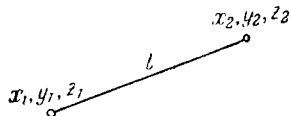


Рис. 229.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2, \quad (101.2)$$

вследствие чего координаты не будут независимыми: достаточно задать любые пять координат, шестая определится условием (101.2). Чтобы классифицировать эти

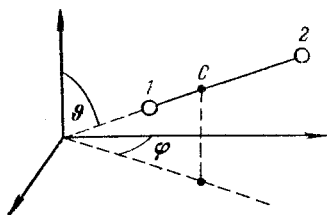


Рис. 230.

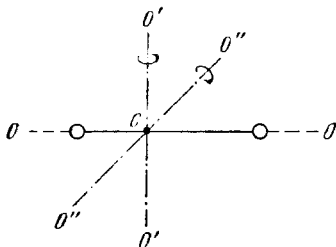


Рис. 231.

пять степеней свободы, заметим, что положение системы, состоящей из двух жестко связанных материальных точек, можно определить следующим образом: задать три координаты центра инерции системы (рис. 230) и два угла  $\theta$  и  $\varphi$ , которыми определяется направление в пространстве оси системы (т. е. прямой, проходящей через обе точки). Отсюда следует, что три степени свободы

будут поступательными и две — вращательными. Вращательные степени свободы соответствуют вращениям вокруг двух взаимно-перпендикулярных осей  $O'O'$  и  $O''O''$ , перпендикулярных к оси системы  $OO$  (рис. 231). Вращение вокруг оси  $OO$  для материальных точек лишено смысла.

Если две материальные точки связаны не жесткой связью, а упругой (т. е. так, что всякое изменение равновесного расстояния  $r_0$  между точками влечет за собой возникновение сил, стремящихся установить между точками первоначальное расстояние), то число степеней

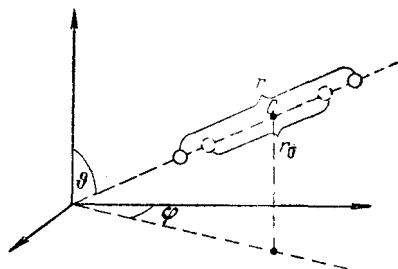


Рис. 232.

свободы будет равно шести. Положение системы в этом случае можно определить, задав три координаты центра инерции (рис. 232), два угла  $\theta$ ,  $\phi$  и расстояние между точками  $r$ . Изменения  $r$  соответствуют колебаниям в системе, вследствие чего эту

ступень свободы называют колебательной. Итак, рассмотренная система имеет три поступательные, две вращательные и одну колебательную степень свободы.

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  упруго связанных друг с другом материальных точек. Такая система имеет  $3N$  степеней свободы. Существует равновесная конфигурация точек, отвечающая минимуму потенциальной энергии системы. Равновесная конфигурация характеризуется вполне определенными взаимными расстояниями между точками. Если точки вывести из положений, соответствующих равновесной конфигурации, в системе возникнут колебания. Положение системы можно определить, задав положение равновесной конфигурации и величины, характеризующие смещения точек из равновесных положений. Последние величины соответствуют колебательным степеням свободы.

Положение равновесной конфигурации, как и положение абсолютно твердого тела, определяется шестью величинами, которым соответствуют три поступательные



и три вращательные степени свободы. Таким образом, количество колебательных степеней свободы равно  $3N - 6$ <sup>1)</sup>.

Из опытов по измерению теплоемкости газов вытекает, что при определении числа степеней свободы молекулы атомы следует рассматривать как материальные точки. Следовательно, одноатомной молекуле нужно приписывать три поступательные степени свободы, двухатомной молекуле, в зависимости от характера связи между атомами, следует приписывать либо три поступательные и две вращательные степени свободы (при жесткой связи), либо, кроме этих пяти, еще одну, колебательную степень свободы (при упругой связи), трехатомной молекуле с жесткой связью — три поступательные и три вращательные степени свободы и т. д.

Заметим, что, сколько бы степеней свободы ни имела молекула, три из них — поступательные. Поскольку ни одна из поступательных степеней свободы молекулы не имеет преимущества перед остальными, на каждую из них должна приходиться в среднем одинаковая энергия, равная одной трети значения  $(101.1)$ , т. е.  $kT/2$ . Естественно предположить, что ни один из видов движения не имеет преимущества перед другими и, следовательно, на любую степень свободы — поступательную, вращательную и колебательную — должна приходиться в среднем одинаковая энергия (точнее говоря, кинетическая энергия), равная  $kT/2$ . Это утверждение и представляет собой содержание положения о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Насколько справедливо это положение, будет выяснено в следующем параграфе.

Согласно положению о равномерном распределении среднее значение энергии одной молекулы  $\bar{\epsilon}$  будет (при той же температуре) тем больше, чем сложнее молекула, чем больше у нее степеней свободы. При определении  $\bar{\epsilon}$  нужно учесть, что колебательная степень свободы должна обладать вдвое большей энергетической емкостью по сравнению с поступательной или вращательной. Это объясняется тем, что поступательное и вращательное движение молекулы связано с наличием только кинетической

---

<sup>1)</sup> Предполагается, что равновесные положения точек не лежат на одной прямой. В противном случае вращательных степеней свободы будет только две, а колебательных  $3N - 5$ . С таким случаем мы имели дело при рассмотрении системы, состоящей из двух точек.

энергии, в то время как колебательное движение связано с наличием и кинетической, и потенциальной энергии, причем для гармонического осциллятора среднее значение кинетической и потенциальной энергии оказывается одинаковым. Поэтому на каждую колебательную степень свободы должны приходиться в среднем две половинки  $kT$  — одна в виде кинетической энергии и одна в виде потенциальной.

Таким образом, средняя энергия молекулы должна равняться:

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT, \quad (101.3)$$

где  $i$  — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}. \quad (101.4)$$

Для молекул с жесткой связью между атомами  $i$  совпадает с числом степеней свободы молекулы.

## § 102. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа

Вследствие того, что молекулы идеального газа на расстоянии не взаимодействуют, внутренняя энергия такого газа будет складываться из энергий отдельных молекул. Следовательно, внутренняя энергия одного киломоля идеального газа будет равна произведению числа Авогадро на среднюю энергию одной молекулы:

$$U_{\text{км}} = N_A \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT. \quad (102.1)$$

Внутренняя энергия произвольной массы газа  $m$  будет равна внутренней энергии одного моля, умноженной на число киломолей газа, содержащихся в массе  $m$ :

$$U = \frac{m}{\mu} U_{\text{км}} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT. \quad (102.2)$$

*Теплоемкостью* какого-либо тела называется величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус. Если сообщение телу количества тепла  $d'Q$  повышает его

температуру на  $dT$ , то теплоемкость по определению равна

$$C_{\text{тела}} = \frac{d'Q}{dT}. \quad (102.3)$$

Величина (102.3) имеет размерность  $\text{дж/град}$ .

Теплоемкость киломоля вещества мы будем обозначать буквой  $C$ . Размерность  $C$  равна  $\text{дж/град} \cdot \text{кмоль}$ .

Теплоемкость единицы массы вещества называется удельной теплоемкостью. Ее мы будем обозначать буквой  $c$ . Размерность  $c$  равна  $\text{дж/град} \cdot \text{кг}$ .

Между теплоемкостью киломоля вещества и удельной теплоемкостью того же вещества имеется очевидное соотношение:

$$c = \frac{C}{\mu}. \quad (102.4)$$

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или при постоянном давлении. В первом случае теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном объеме (обозначается  $C_V$ ), во втором — теплоемкостью при постоянном давлении ( $C_p$ ).

Если нагревание происходит при постоянном объеме, тело не совершает работы над внешними телами и, следовательно, согласно первому началу термодинамики [см. (95.4)], все тепло идет на приращение внутренней энергии тела:

$$d'Q_V = dU. \quad (102.5)$$

Из (102.5) вытекает, что теплоемкость любого тела при постоянном объеме равна

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V. \quad (102.6)$$

Следовательно, чтобы получить теплоемкость киломоля идеального газа при постоянном объеме, нужно

---

<sup>1)</sup> Точнее это выражение записывается в виде  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ .

Такая запись подчеркивает то обстоятельство, что при дифференцировании выражения для  $U$  по  $T$  объем следует считать постоянным. В случае идеального газа  $U$  является функцией только от  $T$  [см. (102.1)], так что выражение (102.6) оказывается вполне строгим.

продифференцировать по температуре выражение (102.1) для внутренней энергии газа. Произведя дифференцирование, получим:

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (102.7)$$

Как следует из этого выражения, теплоемкость идеального газа при постоянном объеме оказывается постоянной величиной, не зависящей от параметров состояния газа, в частности от температуры.

Заметим, что с учетом (102.7) выражение для внутренней энергии идеального газа может быть записано в следующем виде:

$$U_{\text{км}} = C_V T. \quad (102.8)$$

Если нагревание газа происходит при постоянном давлении, то газ будет расширяться, совершая над внешними телами положительную работу. Следовательно, для повышения температуры газа на один градус в этом случае понадобится больше тепла, чем при нагревании при постоянном объеме, — часть тепла будет затрачиваться на совершение газом работы. Поэтому теплоемкость при постоянном давлении должна быть больше, чем теплоемкость при постоянном объеме.

Напишем уравнение (96.4) первого начала термодинамики для киломоля газа:

$$d'Q_p = dU_{\text{км}} + p dV_{\text{км}}. \quad (102.9)$$

В этом выражении индекс  $p$  при  $d'Q$  указывает на то, что тепло сообщается газу в условиях, когда  $p$  постоянно. Разделив (102.9) на  $dT$ , получим выражение для теплоемкости киломоля газа при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{dU_{\text{км}}}{dT} + p \left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p. \quad (102.10)$$

Слагаемое  $\frac{dU_{\text{км}}}{dT}$  дает, как мы видели, теплоемкость киломоля при постоянном объеме. Поэтому формула (102.10) может быть записана следующим образом:

$$C_p = C_V + p \left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p. \quad (102.11)$$

Величина  $\left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p$  представляет собой приращение объема киломоля при повышении температуры на один

градус, получающееся в случае, если  $p$  постоянно. В соответствии с уравнением состояния (98.13)

$$V_{\text{км}} = \frac{RT}{p}.$$

Дифференцируя это выражение по  $T$  ( $p = \text{const}$ ), находим:

$$\left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p = \frac{R}{p}.$$

Наконец, подставляя этот результат в (102.11), получаем:

$$C_p = C_V + R. \quad (102.12)$$

Таким образом, работа, которую совершает киломоль идеального газа при повышении его температуры на один градус при постоянном давлении, оказывается равной универсальной газовой постоянной.

Отметим, что соотношение (102.12) получено с использованием уравнения состояния идеального газа и, следовательно, справедливо только для идеального газа.

С учетом формулы (102.7) можно получить для  $C_p$  следующее выражение:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (102.13)$$

Поделив (102.13) на (102.7), найдем характерное для каждого газа отношение  $C_p$  к  $C_V$ :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (102.14)$$

Как следует из (102.14), величина  $\gamma$  определяется числом и характером степеней свободы молекулы.

В таблице 4 приведены значения  $C_V$ ,  $C_p$  и  $\gamma$ , получающиеся для различных молекул по формулам (102.7), (102.13) и (102.14).

В таблице 5 сопоставлены результаты теории с экспериментальными данными. Теоретические значения получены (за исключением одного случая, указанного в примечании к таблице) в предположении, что молекулы являются жесткими; экспериментальные — получены для температур, близких к комнатной.

Таблица 4

Молекула	Характер связи между атомами	Число степеней свободы			$i$	$C_V$	$C_P$	$\gamma$
		посугпат.	вращат.	колебат.				
Одноатомная	—	3	—	—	3	$\frac{3}{2} R$	$\frac{5}{2} R$	1,67
Двухатомная	Жесткая	3	2	—	5	$\frac{5}{2} R$	$\frac{7}{2} R$	1,40
»	Упругая	3	2	1	7	$\frac{7}{2} R$	$\frac{9}{2} R$	1,29
С числом атомов три и более	Жесткая	3	3	—	6	$\frac{6}{2} R$	$\frac{8}{2} R$	1,33

Таблица 5

Газ	Количество атомов в молекуле	$C_V \cdot 10^{-3}$ дж/град·кмоль		$C_P \cdot 10^{-3}$ дж/град·кмоль		$\gamma$	
		теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.
Гелий (He) . . . .	1	12,5	12,5	20,8	20,9	1,67	1,67
Кислород (O <sub>2</sub> ) . .	2	20,8	20,9	29,1	28,9	1,40	1,40
Окись углерода (CO) . . . . .	2	20,8	21,0	29,1	29,3	1,40	1,40
Пары воды (H <sub>2</sub> O)	3	25,0 33,2*)	27,8	33,2 41,5*)	36,2	1,33 1,25*)	1,31

\*) Для  $i = 8$ , т. е. в предположении, что имеется дополнительно одна колебательная степень свободы.

Как следует из таблицы 5, согласие между теорией и экспериментом на первый взгляд, во всяком случае для одно- и двухатомных молекул, оказывается вполне удовлетворительным. В действительности это не так. Согласно рассмотренной нами теории теплоемкости газов должны быть целыми, кратными  $R/2$ , ибо число степеней свободы может быть только целым. Поэтому даже малые отклонения  $C_V$  и  $C_P$  от значений, кратных  $R/2$ , иг-

рают принципиальную роль. Как видно из таблицы, такие отклонения, причем заведомо превышающие возможные погрешности измерений, имеют место.

Особенно разительными становятся расхождения между теорией и экспериментом, если обратиться к температурной зависимости теплоемкости. На рис. 233 изображена кривая зависимости теплоемкости киломоля  $C_V$  от температуры, полученная опытным путем для водорода. Согласно теории теплоемкость не должна зависеть

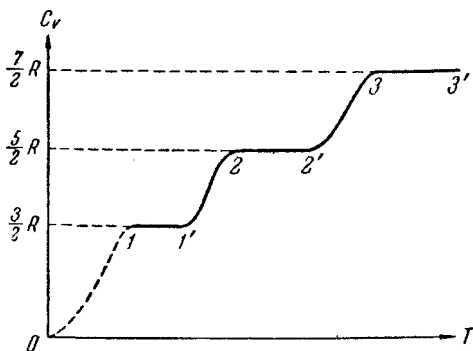


Рис. 233.

от температуры [см. (102.7)]. Как видно из рисунка, это оказывается справедливым только в пределах отдельных температурных интервалов, причем в различных интервалах теплоемкость имеет значения, соответствующие различному числу степеней свободы молекулы. Так, на участке  $1-1'$   $C_V$  равна  $\frac{3}{2}R$ . Это означает, что молекула ведет себя, как система, обладающая только поступательными степенями свободы. На участке  $2-2'$   $C_V$  равна  $\frac{5}{2}R$ . Следовательно, при температурах, соответствующих этому участку, у молекулы, в дополнение к проявляющимся при более низких температурах трем поступательным степеням свободы, добавляются еще две вращательные. Наконец, при достаточно больших температурах  $C_V$  делается равной  $\frac{7}{2}R$ , что свидетельствует о наличии при этих температурах колебаний молекулы. В промежутках между указанными интервалами

теплоемкость монотонно растет с температурой, т. е. соответствует как бы нецелому переменному числу степеней свободы.

Таким образом, число степеней свободы молекулы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от температуры. При низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул. При более высоких температурах наряду с поступательным движением наблюдается также вращение молекул. И, наконец, при еще более высоких температурах к первым двум видам движения добавляются также колебания молекул. При этом, как следует из монотонного хода кривой теплоемкости, во вращательное, а затем в колебательное движение вовлекаются не сразу все молекулы. Сначала вращение, например, начинает наблюдаться только у небольшой доли молекул. С повышением температуры эта доля растет и в конечном итоге при достижении определенной температуры во вращательное движение будут вовлечены практически все молекулы. Аналогичный процесс имеет место и для колебательного движения молекул.

Объяснение такого поведения теплоемкости дается квантовой механикой. Как устанавливает квантовая теория, энергия вращательного и колебательного движений молекул оказывается квантованной. Это означает, что энергия вращения и энергия колебания молекулы могут иметь не любые значения, а только дискретные (т. е. отдельные, отличающиеся друг от друга на конечную величину) значения. Следовательно, энергия, связанная с этими видами движения, может меняться только скачками. Для энергии поступательного движения такого ограничения не существует.

Интервалы между отдельными допускаемыми значениями энергии (или, как принято говорить, между уровнями энергии) для колебаний примерно на порядок больше, чем для вращения. Упрощенная схема<sup>1)</sup> вращательных и колебательных уровней двухатомной молекулы дается на рис. 234.

Как мы увидим в § 106, молекулы газа распределены по значениям энергии таким образом, что подавляющая часть их обладает энергиями, близкими к среднему зна-

<sup>1)</sup> В действительности расстояния между вращательными уровнями неодинаковы. Однако это несущественно для рассматриваемого вопроса.



чению  $\bar{\epsilon}$ , и лишь малая доля молекул имеет энергии, значительно превышающие  $\bar{\epsilon}$ . Поэтому, для того чтобы заметная доля молекул оказалась вовлеченной во вращательное или колебательное движение, их средняя энергия должна быть достаточно велика по сравнению с расстоянием между дозволёнными уровнями соответствующей энергии.

Возьмем столь низкую температуру, что средняя энергия молекулы  $\bar{\epsilon}$  значительно меньше первого дозволённого значения энергии вращательного движения (см. нижнюю пунктирную прямую на рис. 234). Тогда лишь незначительная часть всех молекул вовлекается во вращательное движение, так что практически молекулы газа будут двигаться только поступательно. Небольшие изменения температуры будут приводить к изменениям только энергии поступательного движения, в соответствии с чем теплоемкость газа оказывается равной  $\frac{3}{2} R$  (см. участок 1—1' на кривой, изображенной на рис. 233).

Повышение температуры сопровождается возрастанием  $\bar{\epsilon}$ , вследствие чего все большая часть молекул вовлекается во вращательное движение. Этому процессу соответствует участок кривой 1'—2 на рис. 233.

После того как все молекулы будут вовлечены во вращательное движение, начнется горизонтальный участок 2—2'. При температурах, соответствующих этому участку,  $\bar{\epsilon}$  еще значительно меньше, чем расстояние между дозволёнными уровнями колебательной энергии, вследствие чего колебания молекул практически будут отсутствовать. При дальнейшем повышении температуры молекулы начнут во все большем количестве вовлекаться в колебательное движение, чему соответствует переходный участок 2'—3 на кривой теп-

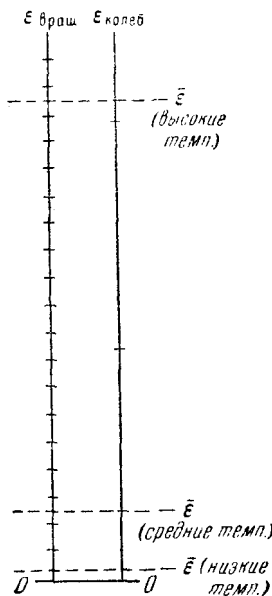


Рис. 234.

лоемкости. Наконец, при достаточно высокой температуре все молекулы окажутся вовлеченными в колебательное движение, в связи с чем теплоемкость станет равной  $\frac{7}{2} R$ .

Возвращаясь к развитой нами классической теории теплоемкости, можно сказать, что ее результаты приблизительно верны для отдельных температурных интервалов, причем каждому интервалу соответствует свое число степеней свободы молекулы.

### § 103. Уравнение адиабаты идеального газа

Адиабатическим называется процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой. Найдем уравнение, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе.

Подставим в уравнение (96.4) первого начала термодинамики выражение  $dU$  для идеального газа:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + p dV.$$

Так как для адиабатического процесса  $d'Q = 0$ , должно выполняться условие

$$\frac{m}{\mu} C_V dT + p dV = 0. \quad (103.1)$$

Теперь выразим  $p$  через  $V$  и  $T$  в соответствии с уравнением состояния идеального газа:

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V},$$

и подставим это выражение в (103.1). В результате, сокращая на отличный от нуля множитель  $m/\mu$ , получим:

$$C_V dT + RT \frac{dV}{V} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$d \left( \ln T + \frac{R}{C_V} \ln V \right) = 0,$$

откуда следует, что при адиабатическом процессе

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const.} \quad (103.2)$$

Учтя, что для идеального газа  $C_p - C_v = R$ , отношение  $R/C_V$  можно заменить через  $\gamma - 1$ , где  $\gamma = C_p/C_v$ . Произведя в (103.2) такую замену и проинтегрировав полученное выражение, мы придем к уравнению

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (103.3)$$

Полученное соотношение представляет собой уравнение адиабаты идеального газа в переменных  $T$  и  $V$ . От этого уравнения можно перейти к уравнению в переменных  $p$  и  $V$ , заменив в нем  $T$  через  $p$  и  $V$  в соответствии с уравнением состояния идеального газа:

$$T = \frac{\mu}{m} \frac{pV}{R}.$$

Подставив это выражение в (103.3) и учитывая, что  $m$ ,  $\mu$  и  $R$  — постоянные, получаем:

$$pV^\gamma = \text{const}^1). \quad (103.4)$$

Соотношение (103.4) есть уравнение адиабаты идеального газа в переменных  $p$  и  $V$ . Его называют также уравнением Пуассона.

Из сопоставления уравнения адиабаты (103.4) с уравнением изотермы (98.3) следует, что адиабата идет круче, чем изотерма. Вычислим  $\frac{dp}{dV}$  для изотермы и адиабаты в одной и той же точке  $(p, V)$  (рис. 235). Дифференцирование уравнения (98.3) дает:

$$p dV + V dp = 0,$$

откуда для изотермы получаем:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}. \quad (103.5)$$

Продифференцировав (103.4), получим:

$$p\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0,$$

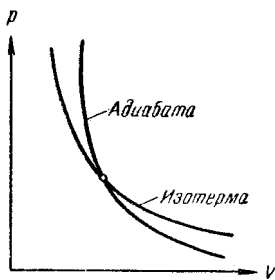


Рис. 235.

<sup>1)</sup> Значения const в (103.2) — (103.4), очевидно, различны.

откуда

$$\frac{d\rho}{dV} = -\gamma \frac{\rho}{V}.$$

Таким образом, тангенс угла наклона адиабаты в  $\gamma$  раз больше, чем у изотермы.

Во всех рассуждениях мы предполагали, что состояние газа в каждый момент времени характеризуется определенными значениями параметров  $p$  и  $T$ , т. е., иными словами, что рассматриваемый адиабатический процесс является равновесным. Как мы знаем, равновесным может быть только процесс, протекающий очень медленно. Вместе с тем, поскольку совершенно не проводящих тепло веществ в природе не существует, количество тепла, которым обменивается система с ее окружением, будет тем меньше, чем меньше время длится процесс. Таким образом, близкими к адиабатическому могут быть только быстро протекающие процессы. Примером такого процесса могут служить сжатие и расширение, происходящие в каждой точке газа, в котором распространяется звуковая волна. Несмотря на то, что в пределах большого объема состояние газа при этом отнюдь не является равновесным ( $p$  и  $T$  в разных точках различны), поведение газа в пределах каждого, достаточно малого объема вполне удовлетворительно описывается уравнением адиабаты (103.4).

## § 104. Политропические процессы

Все рассмотренные нами ранее процессы являются частными случаями политропического процесса. Поли-

Таблица 6

$n$	Процесс
0	Изобарический
1	Изотермический
$\gamma$	Адиабатический
$\pm \infty$	Изохорический

тропическим называется такой процесс, при котором давление и объем идеального газа связаны соотношением

$$pV^n = \text{const}, \quad (104.1)$$

где  $n$  может принимать значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

В таблице 6 указаны значения  $n$ , при которых политропический процесс оказывается тождественным с одним из уже известных нам процессов. Первые три стро-

ки таблицы очевидны. Чтобы убедиться в справедливости четвертой строки, напишем уравнение политропы (104.1) в следующем виде:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n, \quad (104.2)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум произвольно взятым состояниям. Извлечем из (104.2) корень степени  $n$ :

$$p_1^{\frac{1}{n}} V_1 = p_2^{\frac{1}{n}} V_2.$$

Устремив теперь  $n$  к  $+\infty$  или  $-\infty$ , мы придем к условию

$$V_1 = V_2,$$

которое характеризует изохорический процесс.

Из уравнения состояния идеального газа, написанного для одного киломоля, следует, что

$$p = R \frac{T}{V}. \quad (104.3)$$

Подставив это значение  $p$  в уравнение (104.1) и учтя, что  $R$  — постоянная величина, получим уравнение политропы в переменных  $T$  и  $V$ :

$$TV^{n-1} = \text{const.} \quad (104.4)$$

Найдем теплоемкость киломоля идеального газа при политропическом процессе. Согласно (96.4) и (102.8)

$$d'Q = C_V dT + p dV.$$

Следовательно,

$$C = \frac{d'Q}{dT} = C_V + p \frac{dV}{dT}. \quad (104.5)$$

Чтобы найти  $\frac{dV}{dT}$ , будем исходить из уравнения политропы в виде (104.4). Дифференцирование этого уравнения дает:

$$V^{n-1} dT + T(n-1)V^{n-2} dV = 0,$$

откуда

$$\frac{dV}{dT} = - \frac{V}{T(n-1)} = - \frac{R}{p(n-1)}$$

[мы воспользовались соотношением (104.3)].

Подстановка найденного нами значения  $\frac{dV}{dT}$  в формулу (104.5) дает для теплоемкости киломоля идеального газа при политропическом процессе следующее выражение:

$$C_n = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{nC_V - C_p}{n-1}. \quad (104.6)$$

Это выражение не содержит параметров состояния  $p$ ,  $V$  и  $T$ . Таким образом, теплоемкость (104.6) есть величина постоянная. В соответствии с этим политропические процессы можно определить как такие процессы, при которых теплоемкость остается постоянной. Такое определение является более общим, чем определение (104.1), — оно применимо к телам и системам тел любой природы, в то время как определение (104.1) справедливо только для идеального газа.

Исходя из предположения, что  $C = C_n = \text{const}$ , можно показать, что идеальный газ при этих условиях следует уравнению (104.1), где

$$n = \frac{C_p - C_n}{C_V - C_n}. \quad (104.7)$$

Рекомендуем проделать этот вывод в порядке упражнения.

### § 105. Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах

Работа, которая совершается при переходе из состояния 1 в состояние 2 каким-либо телом над внешними телами, равна, как известно (см. (96.3)):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (105.1)$$

Чтобы произвести интегрирование, нужно выразить  $p$  через  $V$ . Для этого воспользуемся связью между  $p$  и  $V$  при различных процессах.

Уравнение политропы идеального газа (104.1) можно написать следующим образом:

$$pV^n = p_1V_1^n = p_2V_2^n,$$

где  $p_1$ ,  $V_1$  и  $p_2$ ,  $V_2$  — значения давления и объема газа соответственно в первом (начальном) и втором (конечном) состояниях,  $p$  и  $V$  — давление и объем в любом промежуточном состоянии.

Выразим в соответствии с этим соотношением давление газа через его объем и значения параметров в начальном состоянии<sup>1)</sup>:

$$p = \frac{p_1 V_1^n}{V^n}. \quad (105.2)$$

Подставляя (105.2) в (105.1), получаем:

$$A_{12} = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \quad (105.3)$$

Рассмотрим сначала случай  $n \neq 1$ ; тогда интеграл в (105.3) равен

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right).$$

Подставив это значение интеграла в (105.3) и произведя несложные преобразования, получаем:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (105.4)$$

Полученное выражение можно преобразовать, воспользовавшись тем, какой бы процесс ни происходил с идеальным газом, его параметры связаны уравнением состояния (98.14). В частности, это справедливо и для начального состояния:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1. \quad (105.5)$$

Подставляя (105.5) в (105.4), получаем:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (105.6)$$

Выражения (105.4) и (105.6) дают работу, совершаемую идеальным газом при любом политропическом

<sup>1)</sup> С таким же успехом можно выразить давление через параметры конечного состояния.

процессе, кроме изотермического (соответствующего  $n = 1$ )<sup>1)</sup>. В частности, при адиабатическом процессе

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] \quad (105.7)$$

или

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (105.8)$$

Чтобы вычислить работу идеального газа при изотермическом процессе, заменим давление в формуле (105.1) его выражением через другие величины в соответствии с уравнением состояния. В результате получим ( $T$  можно вынести за знак интеграла, поскольку она постоянна):

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Итак, работа, совершаемая идеальным газом при изотермическом процессе, равна

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (105.9)$$

При изобарическом процессе работа, совершаемая любым телом, в том числе и идеальным газом, равна, как следует из (105.1),

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (105.10)$$

Тот же результат получается, если положить в (105.4)  $n$  равным нулю. В заключение отметим, что при изохорическом процессе работа равна нулю, что справедливо для любых тел.

## § 106. Распределение молекул газа по скоростям

Молекулы газа движутся с самыми различными скоростями, причем как величина, так и направление скорости каждой отдельно взятой молекулы непрерывно меняются из-за соударений (как мы увидим в дальнейшем, при нормальных условиях каждая молекула претерпевает в секунду примерно  $10^9$  соударений).

<sup>1)</sup> Отметим, что при  $n = 1$  выражения (105.4) и (105.6) становятся неопределенными.



Так как все направления движения равновероятны, распределение молекул по направлениям будет равномерным: в пределах любым образом ориентированного, но постоянного по величине телесного угла  $\Delta\Omega$  лежат в каждый момент времени направления движения в среднем одинакового числа молекул  $\Delta N_{\theta,\varphi}$ .

Иначе обстоит дело с численными значениями скорости молекул  $v$ . Возможные значения  $v$ , заключенные в пределах от нуля до бесконечности, отнюдь не равновероятны. Это вытекает из следующих соображений. Изменение скоростей молекул при столкновениях происходит случайным образом. Может случиться, что какая-то молекула в целом ряде последовательных соударений будет получать энергию от своих партнеров по столкновениям, в результате чего ее энергия значительно превзойдет среднее значение  $\bar{\epsilon}$ . Однако, даже если представить себе такой совершенно фантастический случай, при котором все молекулы газа остановятся, передав свою энергию одной-единственной молекуле, то и тогда энергия этой молекулы, а следовательно, и ее скорость, будет конечна. Таким образом, скорость молекул газа вообще не может иметь значений, начиная с некоторого  $v_{\max}$  до  $\infty$ . Учитывая, что процессы, которые привели бы к сосредоточению на одной молекуле заметной доли суммарной энергии всех молекул, маловероятны, можно утверждать, что слишком большие по сравнению со средним значением скорости могут реализоваться крайне редко. Точно так же практически исключено, что в результате соударений скорость молекулы станет равной точно нулю. Следовательно, очень малые и очень большие по сравнению со средним значением скорости маловероятны, причем вероятность данного значения  $v$  стремится к нулю как при  $v \rightarrow 0$ , так и при  $v \rightarrow \infty$ .

Из сказанного следует, что скорости молекул группируются в основном вблизи некоторого наиболее вероятного значения.

Для выяснения способа, которым можно количественно описать распределение молекул по значениям  $v$ , воспользуемся следующим наглядным приемом. Будем отмечать значения скоростей точками на оси  $v$ . Тогда каждой молекуле на этой оси будет соответствовать точка, расстояние которой от точки  $O$ , принятой за начало

отсчета, численно равно величине скорости данной молекулы (рис. 236)

Предположим, что мы располагаем способом одновременного определения скоростей всех  $N$  молекул некоторого количества газа. Изобразив полученные результаты в виде точек<sup>1)</sup> на оси  $v$ , мы получим «моментальную фотографию» скоростей молекул для некоторого момента времени  $t$  (рис. 237). Если бы все значения  $v$

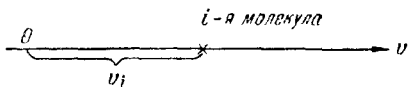


Рис. 236

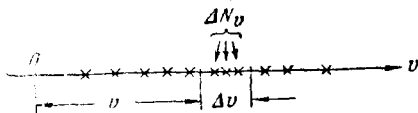


Рис. 237.

были одинаково вероятны, точки распределились бы по оси  $v$  равномерно. Однако, как мы видели выше, скорости группируются в основном вблизи некоторого наиболее вероятного значения. Близкие же к нулю и очень большие значения скорости встречаются сравнительно редко. Поэтому распределение точек на оси  $v$  будет неравномерным, с плотностью, различной на разных участках оси.

Определив плотность точек как отношение числа точек  $\Delta N_v$ , попадающих в пределы интервала  $\Delta v$  (рис. 237), к величине этого интервала:

$$\rho = \frac{\Delta N_v}{\Delta v},$$

можно сказать, что эта величина является функцией  $v$  [ $\rho = \rho(v)$ ]. В самом деле, ее значение зависит от того, в каком месте на оси  $v$  взят интервал  $\Delta v$ , т. е. от  $v$ .

Каждый акт соударения между двумя молекулами изменяет случайным образом положение соответствующих точек на оси  $v$ . Поэтому, если сопоставить ряд «фотографий» для разных моментов времени:  $t_1$ ,  $t_2$  и т. д. (рис. 238), то на этих «фотографиях», вообще говоря, не будет совпадающих точек. Однако если газ находится в равновесном состоянии (т. е. в состоянии

<sup>1)</sup> Отметим, что, затрачивая на нанесение каждой точки только одну секунду, над нанесением  $2,7 \cdot 10^{19}$  точек пришлось бы трудиться  $10^{12}$  лет.

с неизменяющимися параметрами), то распределение молекул по скоростям оказывается неизменным. Поэтому плотность, с которой распределены точки на различных участках оси  $v$ , будет для всех моментов времени одна и та же.

Если взять несколько порций газа, находящихся в идентичных условиях (при одинаковых  $p$  и  $T$ ), то распределение молекул по скоростям в них будет также идентично.

Однако плотность точек на оси  $v$  при одинаковом характере распределения их по оси, очевидно, пропорциональна рассматриваемому количеству молекул  $N$  и, следовательно,

для различных порций газа будет различна. Одинаковым для различных порций будет отношение

$$f(v) = \frac{\rho(v)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\Delta N_v}{\Delta v}. \quad (106.1)$$

Определенная таким образом функция  $f(v)$  характеризует распределение молекул газа по скоростям и называется функцией распределения. Зная вид  $f(v)$ , можно найти количество молекул  $\Delta N_v$  из числа данных молекул  $N$ , скорости которых попадают внутрь интервала  $\Delta v$ , т. е. имеют значения, заключенные в пределах от  $v$  до  $v + \Delta v$ .

$$\Delta N_v = N f(v) \Delta v; \quad (106.2)$$

Отношение

$$\frac{\Delta N_v}{N} = f(v) \Delta v \quad (106.3)$$

дает вероятность того, что скорость молекулы будет иметь значение в пределах данного (лежащего между  $v$  и  $v + \Delta v$ ) интервала скоростей  $\Delta v$  ( $v$  при  $\Delta N$  служит индексом для обозначения интервала  $\Delta v$ )<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Вероятность того, что скорость какой-то молекулы имеет произвольно взятое определенное значение  $v$ , равна нулю. Это объясняется тем, что число возможных значений  $v$  бесконечно, количество же молекул  $N$  хоть и велико, но конечно (сравни с § 100, текст от (100.1) до (100.2)).

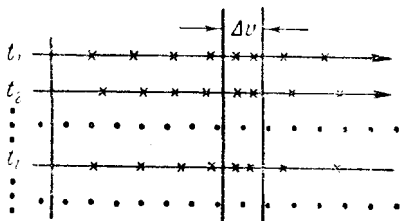


Рис. 238.

Сумма

$$\sum \Delta N_v = \sum N f(v_i) \Delta v_i = \sum \rho_i \Delta v_i,$$

взятая по всем интервалам  $\Delta v_i$ , на которые можно разбить ось  $v$ , должна, очевидно, равняться полному числу молекул  $N$ . Отсюда вытекает следующее свойство функции распределения:

$$\sum f(v_i) \Delta v_i = 1. \quad (106.4)$$

Последний результат можно пояснить также следующим образом. Выражение

$$\sum \frac{\Delta N_v}{N} = \sum f(v_i) \Delta v_i$$

представляет собой вероятность того, что скорость молекулы будет иметь одно из значений в пределах от 0 до  $\infty$ . Поскольку скорость молекулы непременно имеет какое-то значение, указанная вероятность есть вероятность достоверного события и, следовательно, равна единице.

Строго говоря, условие (106.4) должно быть написано следующим образом:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (106.5)$$

Соотношения (106.2)—(106.5) вытекают из общего определения функции распределения и не зависят от ее конкретного вида.

Функция распределения была найдена теоретически Максвеллом и носит его имя. Она имеет следующий вид:

$$f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad (106.6)$$

где  $A$  — множитель, не зависящий от  $v$ ,  $m$  — масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана.

Характерно для функции распределения Максвелла то обстоятельство, что в показателе степени при  $e$  стоит взятое со знаком «—» отношение кинетической энергии молекулы  $mv^2/2$ , отвечающей рассматриваемой скорости  $v$ , к  $kT$ , т. е. величине, характеризующей среднюю энергию молекулы.

Поскольку множитель вида  $e^{-\alpha v^2}$  при возрастании  $v$  убывает быстрее, чем растет множитель  $v^2$ , функция,

начинаясь в нуле (из-за  $v^2$ ), достигает максимума и затем асимптотически стремится к нулю (рис. 239). Площадь, охватываемая кривой  $f(v)$ , в соответствии с (106.5) равна единице.

Условие (106.5) позволяет вычислить множитель  $A$  в (106.6):

$$A \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = 1.$$

Это условие носит название условия нормировки функции,  $A$  называется нормировочным множителем.

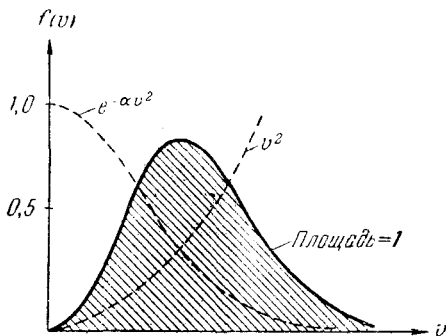


Рис. 239.

Вычисления дают для  $A$  значение  $4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ . Таким образом, функция распределения Максвелла имеет вид

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (106.7)$$

Как и можно было ожидать, конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры  $T$ ). Отметим, что давление и объем газа на распределение молекул по скоростям не влияют.

Может показаться, что функция (106.7) неправильно описывает распределение в связи с тем, что она обращается в нуль только на бесконечности, в то время как реализуемые значения скорости ограничены конечным

пределом. Однако при достаточно больших  $v$  функция (106.7) столь мало отличается от нуля, что отмеченное несоответствие практически не имеет никакого значения.

Скорость, отвечающая максимальному значению функции распределения, будет, очевидно, наиболее вероятной. Действительно, если сравнить числа молекул  $\Delta N_v$ , скорости которых лежат в пределах различным образом выбранных, но равных по величине интервалов  $\Delta v$ , то наибольшим будет  $\Delta N_v$ , соответствующее интервалу, расположенному в окрестности максимума. Таким образом, решив задачу на нахождение максимума  $f(v)$ , мы найдем наиболее вероятную скорость  $v_{\text{вер}}$ . Продифференцировав (106.6) по  $v$  и приравняв полученное выражение нулю, будем иметь:

$$\frac{df(v)}{dv} = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left( 2 - \frac{mv^2}{kT} \right) = 0.$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения  $v = 0$  и  $v = \infty$  соответствуют минимумам  $f(v)$ . Значение  $v$ , обращающее в нуль выражение, стоящее в скобках, представляет собой искомое  $v_{\text{вер}}$ :

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (106.8)$$

Подставив в (106.7) наиболее вероятную скорость, найдем максимальное значение  $f(v)$ :

$$f(v_{\text{вер}}) = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}. \quad (106.9)$$

Исследуем, как изменяется кривая распределения в зависимости от температуры газа и массы молекулы. Из (106.8) и (106.9) следует, что при увеличении температуры (или уменьшении массы молекулы) максимум кривой смещается вправо и становится ниже, причем, как мы знаем, площадь, охватываемая кривой, остается неизменной. На рис. 240 сопоставлены две кривые распределения, которые можно трактовать либо как относящиеся к различным температурам  $T_1$  и  $T_2$  (при одинаковой  $m$ ), либо как относящиеся к различным массам молекул  $m_1$  и  $m_2$  (при одинаковой  $T$ ).

Относительное количество молекул, скорость которых превышает некоторое значение  $v_0$ , определяется выражением

$$\int_{v_0}^{\infty} f(v) dv.$$

На графике этому интегралу соответствует лежащая справа от  $v_0$  часть площади, ограниченной кривой. Как видно из рис. 240, относительное количество молекул,

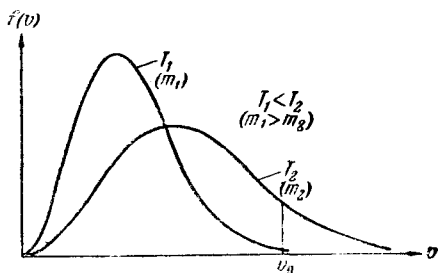


Рис. 240.

имеющих скорости, превышающие  $v_0$ , сильно растет с повышением температуры.

Таблица 7

$\frac{v}{v_{\text{вер}}}$	$\frac{\Delta N}{N}$ , %	$\frac{v}{v_{\text{вер}}}$	$\frac{\Delta N}{N}$ %
0—0,5	8,1	2—3	4,6
0,5—1,5	70,7	>3	0,04
1,5—2	16,6	>5	$8 \cdot 10^{-9}$

В таблице 7 приведены соответствующие функции (106.7) относительные количества молекул  $\Delta N/N$  для различных интервалов скоростей. Как видно из таблицы, более чем у 70% всех молекул скорость отличается от наиболее вероятной не больше чем на 50%. Скоростью, более чем в 3 раза превышающей  $v_{\text{вер}}$ , обладает в среднем только 0,04% молекул. Скорости же, превышающие  $5v_{\text{вер}}$ , наблюдаются в среднем лишь у одной из 12 миллиардов молекул.

Зная распределение молекул по скоростям, можно найти среднее значение скорости, а также любой величины, являющейся функцией скорости, например  $v^2$ .

Разобьем ось скоростей на малые интервалы  $\Delta v_i$ . Каждому интервалу согласно (106.2) соответствует количество молекул:

$$\Delta N_{v_i} = N f(v_i) \Delta v_i. \quad (106.10)$$

Поскольку интервал  $\Delta v_i$  мал, скорость каждой из  $\Delta N_{v_i}$  молекул можно приближенно считать равной  $v_i$  — одному из значений скорости, принадлежащих интервалу  $\Delta v_i$ . Тогда сумму значений скоростей всех  $N$  молекул можно представить в виде  $\sum v_i \Delta N_{v_i}$ . Разделив эту сумму на число молекул  $N$ , получим [с учетом (106.10)] выражение для средней скорости  $\bar{v}$ :

$$\bar{v} = \sum v_i f(v_i) \Delta v_i.$$

Переходя от суммы к интегралу, находим, что

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (106.11)$$

Если подставить в (106.11) выражение (106.7) для  $f(v)$  и произвести вычисления, получится:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (106.12)$$

Аналогичным образом для среднего значения квадрата скорости  $\overline{v^2}$  получается выражение

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv,$$

которое после подстановки  $f(v)$  и вычислений дает  $\overline{v^2} = 3kT/m$ . Корень квадратный из  $\overline{v^2}$  называется средней квадратичной скоростью. Таким образом,

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (106.13)$$



Этот результат согласуется с полученным ранее выражением (99.11) для  $\bar{\epsilon}$ . Чтобы в этом убедиться, нужно заменить в (99.11)  $\bar{\epsilon}$  через  $m\bar{v}^2/2$ .

Следует обратить внимание на то, что  $\bar{v} \neq v_{\text{ср.кв}}$  и  $\bar{v}^2 \neq v^2$ .

Сопоставляя (106.8), (106.12) и (106.13), можно заметить, что  $v_{\text{вер}}$ ,  $\bar{v}$  и  $v_{\text{ср.кв}}$  одинаковым образом зависят от температуры и массы молекулы, отличаясь лишь числовым множителем. Если принять  $v_{\text{вер}}$  за 1, то  $\bar{v} = 1,13$ ,  $v_{\text{ср.кв}} = 1,22$  (рис. 241).

Необходимо подчеркнуть еще раз, что установленный Максвеллом закон распределения молекул по скоростям и все вытекающие из него следствия справедливы только для газа,

находящегося в равновесном состоянии. Закон справедлив для любого числа  $N$ , если только это число достаточно велико. Закон Максвелла — статистический, а законы статистики выполняются тем точнее, чем к большему числу одинаковых объектов они применяются. При малом

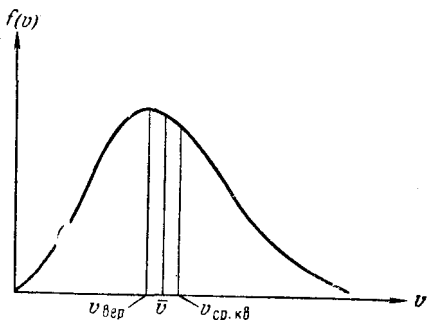


Рис. 241.

числе объектов могут наблюдаться значительные отклонения от предсказаний статистики.

Если имеется смесь газов, находящаяся в равновесии, то в пределах молекул каждого сорта имеет место распределение (106.7) со своим значением  $m$ . Более тяжелые молекулы будут двигаться в среднем с меньшей скоростью, чем более легкие.

Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN_v = N4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (106.14)$$

можно найти распределение молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения. Для этого нужно перейти от переменной  $v$  к переменной  $\epsilon$ , равной  $m\bar{v}^2/2$ . Произведя в (106.14) подстановку  $v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}$

и  $dv = \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon$ , получим:

$$dN_\varepsilon = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (106.15)$$

где  $dN_\varepsilon$  означает число молекул, энергия которых имеет значения, заключенные в пределах от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

Таким образом, распределение молекул по значениям  $\varepsilon$  характеризуется функцией

$$f(\varepsilon) = A' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}, \quad (106.16)$$

где  $A'$  — нормировочный множитель, равный  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}}$ .

В заключение произведем оценку средней скорости молекул, например, кислорода. Вычисления удобнее производить, заменив в (106.12) отношение  $k/m$  равным ему отношением  $R/\mu$ . Тогда выражение для средней скорости примет вид

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (106.17)$$

Молекулярный вес кислорода равен 32. Следовательно, масса киломоля  $\mu = 32$  кг/кмоль. Комнатная температура равна примерно  $300^\circ \text{K}$ . Подставляя в формулу (106.17) численные значения входящих в нее величин, получаем:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 300}{3,14 \cdot 32}} \approx 500 \text{ м/сек.}$$

Таким образом, каждая молекула кислорода проходит за секунду путь, равный в среднем 0,5 км. Поскольку молекула претерпевает очень частые соударения с другими молекулами, этот путь состоит из большого числа коротких прямолинейных отрезков, образующих ломаную линию.

Молекулы водорода имеют массу, в 16 раз меньшую, чем молекулы кислорода, вследствие чего их скорость при той же температуре будет в 4 раза больше и составит при комнатной температуре в среднем почти 2 км/сек.

## § 107. Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла

Первое экспериментальное определение скоростей молекул было осуществлено Штерном в 1920 г. Прибор, использованный для этой цели, состоял из двух коаксиальных цилиндров (рис. 242). По оси прибора была натянута платиновая нить, покрытая серебром. При нагревании нити электрическим током с ее поверхности испарялись атомы серебра. Скорости испарившихся атомов соответствовали температуре нити. Покинув нить, атомы двигались по радиальным направлениям. Внутренний цилиндр имел узкую продольную щель, через которую проходил наружу узкий пучок атомов (молекулярный пучок). Чтобы атомы серебра не отклонялись за счет соударений с молекулами воздуха весь прибор был эвакуирован. Достигнув поверхности внешнего цилиндра, атомы серебра оседали на нее, образуя слой в виде узкой вертикальной полоски.

Если привести весь прибор во вращение, след, оставляемый молекулярным пучком, сместится по поверхности внешнего цилиндра на некоторую величину  $\Delta s$  (рис. 242). Это произойдет потому, что за время, пока атомы серебра пролетают зазор между цилиндрами, прибор успевает повернуться на некоторый угол  $\Delta\phi$ , в результате против пучка окажется другой участок наружного цилиндра, смещенный относительно первоначального следа  $s_0$  на величину  $\Delta s$ , равную  $R\Delta\phi$  ( $R$  — радиус внешнего цилиндра). Рассматривая движение атомов серебра в связанной с цилиндрами вращающейся системе отсчета, смещение следа можно объяснить действием на атомы кориолисовой силы, равной  $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$ .

Расстояние  $\Delta s$  между первоначальной и смещенной полосками серебра можно связать с угловой скоростью вращения цилиндров  $\omega$ , геометрией прибора и скоростью

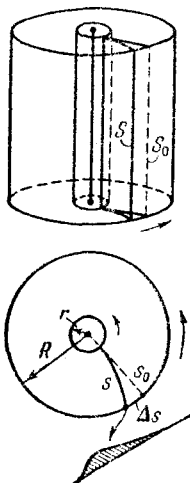


Рис. 242.

атомов  $v$ . Обозначив время пролета через  $\Delta t$ , можно написать, что

$$\Delta s = \omega R \Delta t. \quad (107.1)$$

Поскольку радиус внутреннего цилиндра мал по сравнению с радиусом внешнего цилиндра  $R$ , время пролета  $\Delta t$  можно положить равным

$$\Delta t = \frac{R}{v}.$$

Подставляя это выражение в (107.1) и разрешив получившееся уравнение относительно  $v$ , получим:

$$v = \frac{\omega R^2}{\Delta s}.$$

Измерив смещение следа  $\Delta s$  и скорость вращения прибора, можно определить скорость атомов  $v$ . Положение, правда, осложняется тем, что вследствие распределения по скоростям атомы имеют различные скорости и в результате смещенный слой будет размытым<sup>1)</sup>. Ис-

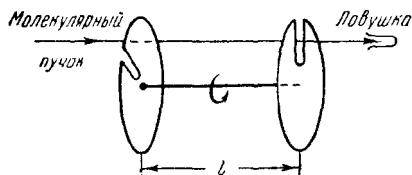


Рис. 243.

следуя профиль следа (рис. 242), можно было составить примерное представление о распределении атомов серебра по скоростям.

Результаты опыта Штерна подтвердили правильность оценки средней скорости ато-

мов, которая вытекает из распределения Максвелла. О характере самого распределения этот опыт мог дать лишь весьма приближенные сведения.

Более точно закон распределения был проверен в опыте Ламмерта (1929 г.), в котором молекулярный пучок пропусклся через два вращающихся диска с радиальными щелями, смещенными друг относительно друга на некоторый угол  $\phi$  (рис. 243). Из числа молекул, пролетевших через щель в первом диске, пролетят через второй диск только те, которые подлетят к нему

<sup>1)</sup> Ширина слоя, получающегося при неподвижном приборе, определяется только геометрией прибора, в частности шириной щели, через которую выходит молекулярный пучок.

в тот момент, когда на пути пучка встанет прорезь во втором диске. Более быстрые молекулы достигнут второго диска слишком рано, а более медленные — слишком поздно для того, чтобы пройти через щель. Таким образом, это устройство позволяет выделить из пучка молекулы, обладающие определенным значением скорости (из-за конечной ширины щелей прибор выделяет молекулы, скорости которых лежат в пределах некоторого интервала  $\Delta v$ ). Средняя скорость выделяемых прибором молекул может быть найдена из условия, что время  $t_1$ , за которое молекулы пролетают расстояние  $l$  между дисками ( $t_1 = l/v$ ), должно совпадать со временем  $t_2$ , за которое диски повернутся на угол  $\varphi$  ( $t_2 = \varphi/\omega$ ). Приравняв оба времени, получим:

$$v = \frac{\omega l}{\varphi}.$$

Меняя скорость вращения прибора  $\omega$  (или угол между дисками  $\varphi$ ), можно выделять из пучка молекулы, обладающие различными значениями скорости. Улавливая затем эти молекулы в течение определенного времени, можно определить их относительное количество в пучке.

Результаты опыта Ламмерта и других опытов, предпринимавшихся с той же целью, находятся в полном согласии с законом распределения, установленным теоретически Максвеллом.

Следует отметить, что распределение молекул по скоростям в пучке, вышедшем через отверстие в сосуде, несколько отличается от распределения, имеющегося в замкнутом сосуде. Так как более быстрые молекулы будут проходить через отверстие в относительно большем количестве, чем более медленные, пучок будет обогащен более быстрыми молекулами. Поскольку количество молекул, пролетающих через отверстие в единицу времени, пропорционально  $v$ , распределение в пучке будет характеризоваться не функцией (106.6), а функцией

$$f_1(v) = A_1 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3,$$

где  $A_1$  — нормировочный множитель.

Наиболее вероятная скорость в этом случае равна  $v'_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ , а средняя скорость  $\bar{v}' = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$ .

## § 108. Барометрическая формула

Атмосферное давление на какой-либо высоте  $h$  обусловлено весом вышележащих слоев газа. Обозначим буквой  $p$  давление на высоте  $h$ . Тогда давление на высоте  $h + dh$  будет  $p + dp$ , причем если  $dh$  больше нуля, то  $dp$  будет меньше нуля, так как вес вышележащих слоев атмосферы, а следовательно, и давление с высотой убывают. Разность давлений  $p$  и  $p + dp$  равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра с площадью основания, равной единице, и высотой  $dh$  (рис. 244):

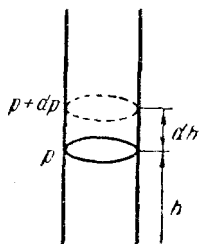


Рис. 244.

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

где  $\rho$  — плотность газа на высоте  $h$ .

Отсюда

$$dp = -\rho g dh. \quad (108.1)$$

Воспользовавшись уравнением состояния, плотность газа можно выразить через давление и температуру. Как уже отмечалось, при условиях, близких к нормальным, газы, входящие в состав атмосферы, мало отличаются по своему поведению от идеального. Поэтому будем исходить из уравнения (98.14). Решив это уравнение относительно  $m/V$ , найдем плотность  $\rho$ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (108.2)$$

Подставив выражение для  $\rho$  в (108.1), получим:

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT} dh,$$

откуда

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (108.3)$$

Температура  $T$  является некоторой функцией от  $h$ . Если вид этой функции известен, уравнение (108.3) можно проинтегрировать и получить  $p$  как функцию  $h$ .

Для случая, когда температура постоянна, интегрирование (108.3) дает

$$\ln p = -\frac{\mu gh}{RT} + \ln C,$$

где  $C$  — постоянная (здесь удобно обозначить постоянную интегрирования через  $\ln C$ ).

Потенцируя полученное выражение, находим, что

$$p = Ce^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Подставив сюда  $h = 0$ , получаем

$$p_0 = C,$$

где  $p_0$  — давление на высоте  $h = 0$ .

Таким образом, при сделанном нами допущении о постоянстве температуры зависимость давления от высоты выражается формулой

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (108.4)$$

Эта формула называется барометрической. Из нее следует, что давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше  $\mu$ ) и чем ниже температура. На рис. 245 изображены две кривые вида

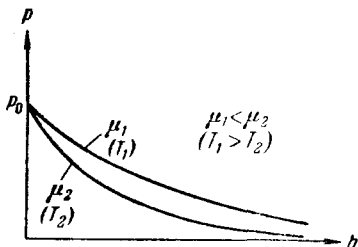


Рис. 245.

(108.4), которые можно трактовать либо как соответствующие разным  $\mu$  (при одинаковой  $T$ ), либо как отвечающие разным  $T$  (при одинаковой  $\mu$ ).

## § 109. Распределение Больцмана

Заменив в (108.4) давление  $p$  через  $nkT$  [см. (99.12)], получим закон изменения с высотой числа молекул в единице объема:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Здесь  $n_0$  — число молекул в единице объема на высоте, равной нулю,  $n$  — то же число на высоте  $h$ .

Полученное выражение можно преобразовать, заменив отношение  $\mu/R$  равным ему отношением  $m/k$ , где  $m$  — масса одной молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (109.1)$$

Из (109.1) следует, что с понижением температуры число частиц на высотах, отличных от нуля, убывает, обращаясь в нуль при  $T = 0$  (рис. 246). При абсолютном нуле все молекулы расположились бы на земной поверхности. При высоких температурах, напротив,  $n$

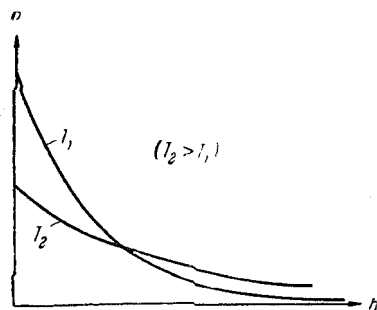


Рис. 246.

слабо убывает с высотой, так что молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно.

Этот факт имеет простое физическое объяснение. Каждое конкретное распределение молекул по высоте устанавливается в результате действия двух тенденций: 1) притяжение молекул к земле (характеризуемое си-

лой  $mg$ ) стремится расположить их на поверхности земли; 2) тепловое движение (характеризуемое величиной  $kT$ ) стремится разбросать молекулы равномерно по всем высотам. Чем больше  $m$  и меньше  $T$ , тем сильнее преобладает первая тенденция и молекулы сгущаются у поверхности земли. В пределе при  $T = 0$  тепловое движение совсем прекращается и под влиянием притяжения молекулы располагаются на земной поверхности. При высоких температурах превалирует тепловое движение и плотность молекул медленно убывает с высотой.

На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии:

$$\epsilon_p = mgh. \quad (109.2)$$

Следовательно, распределение (109.1) молекул по высоте является вместе с тем и распределением их по значениям потенциальной энергии. С учетом (109.2) формулу (109.1) можно записать следующим образом:

$$n = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}}, \quad (109.3)$$

где  $n_0$  — число молекул в единице объема в том месте, где потенциальная энергия молекулы равна нулю,  $n$  —



число молекул в единице объема, соответствующее тем точкам пространства, где потенциальная энергия молекулы равна  $\epsilon_p$ .

Из (109.3) следует, что молекулы располагаются с большей плотностью там, где меньше их потенциальная энергия, и, наоборот, с меньшей плотностью в местах, где их потенциальная энергия больше.

В соответствии с (109.3) отношение  $n_1$  к  $n_2$  в точках, где потенциальная энергия молекулы имеет значения  $\epsilon_{p1}$  и  $\epsilon_{p2}$ , равно

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2}}{kT}}. \quad (109.4)$$

Больцман доказал, что распределение (109.3), как и вытекающая из него формула (109.4), справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. В соответствии с этим распределение (109.3) называют распределением Больцмана.

В то время как закон Максвелла дает распределение частиц по значениям кинетической энергии, закон Больцмана дает распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Для обоих распределений характерно наличие экспоненциального множителя, в показателе которого стоит отношение кинетической или соответственно потенциальной энергии одной молекулы к величине, определяющей среднюю энергию теплового движения молекулы.

Распределения (106.14) и (109.3) можно объединить в один закон Максвелла — Больцмана, согласно которому содержащееся в единице объема количество молекул, скорость которых лежит между  $v$  и  $v + dv$ , равно

$$dn_{\epsilon_p, v} = n_0 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_p + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv \sim e^{-\frac{E}{kT}} v^2 dv, \quad (109.5)$$

где  $n_0$  — число молекул в единице объема в той точке, в которой  $\epsilon_p = 0$ , а  $E$  — полная энергия молекулы, равная сумме ее кинетической и потенциальной энергий.

В соответствии с условием (106.5) интегрирование (109.5) по  $v$  в пределах от 0 до  $\infty$  приводит к выражению

$$n = n_0 e^{-\frac{v_p}{kT}},$$

совпадающему с распределением (109.3).

В распределении (109.5) потенциальная энергия  $\epsilon_p$  и кинетическая энергия  $mv^2/2$ , а следовательно и полная энергия  $E$ , могут принимать непрерывный ряд значений. Если полная энергия частицы может принимать лишь дискретный ряд значений:  $E_1, E_2, \dots$ , как это имеет место, например, для внутренней энергии атома, то распределение Больцмана имеет вид:

$$N_i = A e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (109.6)$$

где  $N_i$  — число частиц, находящихся в состоянии с энергией  $E_i$ ,  $A$  — коэффициент пропорциональности, который должен удовлетворять условию

$$\sum N_i = A \sum e^{-\frac{E_i}{kT}} = N$$

( $N$  — полное число частиц в рассматриваемой системе).

Подставив найденное из последнего соотношения значение  $A$  в формулу (109.6), получим окончательное выражение распределения Больцмана для случая дискретных значений энергий:

$$N_i = \frac{N e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}}. \quad (109.7)$$

## § 110. Определение Перреном числа Авогадро

Распределение (109.4) было положено Перреном (1909 г.) в основу опытов по определению числа Авогадро. Взвешенные в жидкости очень мелкие твердые частицы находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, называемого броуновским движением (см. § 91). Причина его заключается в том, что при достаточно малых размерах частиц импульсы, сооб-

щаемые частицы ударяющимися о нее с разных сторон молекулами, оказываются нескомпенсированными. О частицу заметных размеров ударяется одновременно большое число молекул, так что суммарный результат ударов молекул достаточно хорошо усредняется. При малых размерах частицы начинают проявляться отклонения скоростей отдельных молекул и числа ударяющихся молекул от средних значений. Если скорость или число молекул, ударяющихся о частицу с одной стороны, окажется иной, чем для молекул, ударяющихся с другой стороны, то результирующий импульс, сообщаемый частице, будет отличен от нуля и частица начнет двигаться в соответствующем направлении. В следующий момент результирующий импульс имеет иное направление. Следовательно, частица будет все время перемещаться беспорядочным образом.

Броуновское движение указывает на то, что достаточно малые частицы вовлекаются в совершаемое молекулами тепловое движение. Принимая участие в тепловом движении, такие частицы должны вести себя подобно гигантским молекулам, и на них должны распространяться закономерности кинетической теории, в частности закон (109.4).

Основную трудность в опытах Перрена составляло приготовления одинаковых частиц и определение их массы. Применяя многократно метод центрифугирования, Перрену удалось приготовить весьма однородную эмульсию из практически одинаковых шариков гуммигута<sup>1)</sup> с радиусами порядка нескольких десятых долей микрона. Эмульсия помещалась в плоскую стеклянную кювету глубиной 0,1 мм и рассматривалась с помощью микроскопа (рис. 247). Микроскоп имел столь малую глубину поля зрения, что в него были видны только частицы, находящиеся в горизонтальном слое толщиной примерно 1 мк. Перемещая микроскоп в вертикальном направлении, можно было исследовать распределение броуновских частиц по высоте.

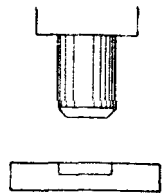


Рис. 247.

<sup>1)</sup> Гуммигут — сгущенный млечный сок, получаемый из надрезов в коре некоторых видов деревьев, растущих в Ост-Индии и на Цейлоне.

Обозначим высоту слоя, видимого в микроскоп, над дном кюветы буквой  $h$ . Число частиц, попадающих в поле зрения микроскопа, определяется формулой

$$\Delta N = n(h) S \Delta h,$$

где  $n(h)$  — число броуновских частиц в единице объема на высоте  $h$ ,  $S$  — площадь, а  $\Delta h$  — глубина поля зрения микроскопа.

Применив к броуновским частицам формулу (109.3), можно написать:

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{\rho' h}{kT}},$$

где  $n_0$  — число частиц в единице объема при  $h = 0$ ,  $\rho'$  — вес броуновской частицы в эмульсии, т. е. вес, взятый с учетом поправки на закон Архимеда.

Написав выражение числа частиц  $\Delta N$  для двух разных высот  $h_1$  и  $h_2$ , получаем:

$$\Delta N_1 = n_0 e^{-\frac{\rho' h_1}{kT}} S \Delta h,$$

$$\Delta N_2 = n_0 e^{-\frac{\rho' h_2}{kT}} S \Delta h.$$

Наконец, логарифмируя отношение  $\Delta N_1/\Delta N_2$ , приходим к следующему выражению:

$$\ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{\rho' (h_2 - h_1)}{kT}.$$

С помощью этой формулы по измеренным  $\rho'$ ,  $T$ ,  $(h_2 - h_1)$ ,  $\Delta N_1$  и  $\Delta N_2$  можно определить постоянную Больцмана  $k$ . Далее, разделив универсальную газовую постоянную  $R$  на  $k$ , можно было найти число Авогадро.

Полученное Перреном на различных эмульсиях значение  $N_A$  лежало в пределах от  $6,5 \cdot 10^{26}$  до  $7,2 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>. Определенное другими, более точными методами значение  $N_A$  равно  $6,02 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>. Таким образом, значение, полученное Перреном, находится в хорошем согласии со значениями, полученными другими методами, что доказывает применимость к броуновским частицам распределения (109.4).

## § 111. Средняя длина свободного пробега

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы  $d$  (рис. 248). Как мы увидим в дальнейшем (см. § 117), эффективный диаметр несколько уменьшается с увеличением скорости молекул, т. е. с повышением температуры. Величина  $\sigma = \pi d^2$  называется эффективным сечением молекулы.

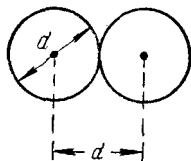


Рис. 248.

За время между двумя последовательными соударениями молекула газа проходит некоторый путь  $l$ , который называется длиной свободного пробега. Длина свободного пробега — случайная величина. Иной раз молекуле удастся пролететь между соударениями довольно большой путь, в другой раз этот путь может оказаться весьма малым. Как можно показать, вероятность  $w(l)$  того, что молекула пролетит без столкновений путь  $l$ , определяется формулой

$$w(l) = e^{-\frac{l}{\lambda}}, \quad (111.1)$$

где  $\lambda$  — средний путь  $l$ , проходимый молекулой между двумя последовательными соударениями, называемый средней длиной свободного пробега. В соответствии с (111.1) вероятность того, что молекула пролетит без столкновений некоторый путь  $l$ , убывает экспоненциально с увеличением  $l$ . За секунду молекула проходит в среднем путь, равный средней скорости  $\bar{v}$ . Если за секунду она претерпевает в среднем  $\nu$  столкновений, то средняя длина свободного пробега, очевидно, будет равна

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu}. \quad (111.2)$$

Для того чтобы подсчитать среднее число столкновений  $\nu$ , предположим вначале, что все молекулы кроме данной, застыли неподвижно на своих местах. Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул, она будет

лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой (рис. 249). Это соударение произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии, меньшем эффективного диаметра молекулы  $d$ . В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно, пока на ее пути снова не встретится молекула, центр которой будет находиться в пределах показанного на рис. 249, цилиндра радиуса  $d$ .

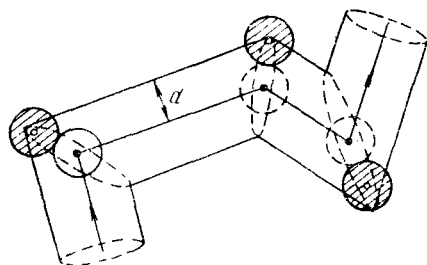


Рис. 249.

За секунду молекула пройдет путь, равный  $\bar{v}$ . Очевидно, что число происходящих за это время соударений с неподвижными молекулами равно количеству молекул, центры которых попадают внутрь коленчатого цилиндра длины  $\bar{v}$  и радиуса  $d$ , объем которого равен  $\pi d^2 \bar{v}$ . Умножив этот объем на число молекул в единице объема  $n$ , получим среднее число столкновений за секунду движущейся молекулы с неподвижными:

$$\nu' = \pi d^2 \bar{v} n.$$

В действительности все молекулы движутся, вследствие чего число соударений определяется средней скоростью движения молекул по отношению друг к другу. Как показывает соответствующий расчет, средняя скорость относительно движения молекул в  $\sqrt{2}$  раз больше скорости  $\bar{v}$  молекул относительно стенок сосуда. Поэтому среднее число столкновений за секунду будет равно

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n. \quad (111.3)$$

Подставив это число в (111.2), получим для средней длины свободного пробега следующее выражение:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (111.4)$$

Заменив эффективный диаметр  $d$  эффективным сечением молекулы  $\sigma$ , получим следующую формулу:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (111.5)$$

Поскольку при постоянной температуре  $n$  изменяется пропорционально давлению  $p$ , средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению:

$$\lambda \sim \frac{1}{p}. \quad (111.6)$$

Эффективный диаметр молекул, как уже отмечалось, убывает с ростом температуры. Поэтому средняя длина

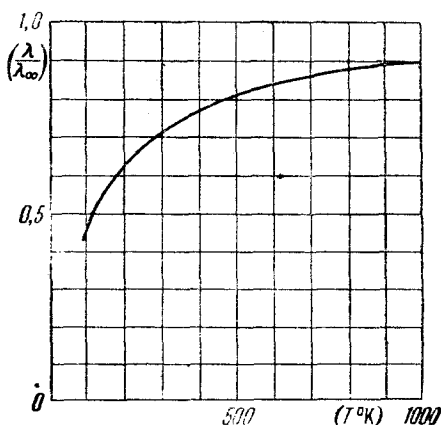


Рис. 250.

свободного пробега с повышением температуры растет. Зависимость  $\lambda$  от  $T$  дается формулой Сёзерленда:

$$\lambda = \lambda_{\infty} \frac{T}{T + C}, \quad (111.7)$$

где  $C$  — характерная для каждого газа постоянная величина, имеющая размерность температуры и носящая название постоянной Сёзерленда,  $\lambda_{\infty}$  — средняя длина свободного пробега при  $T = \infty$ .

Из (111.7) следует, что при температуре  $T = C$  значение  $\lambda$  составляет  $0,5\lambda_{\infty}$ .

На рис. 250 показана зависимость  $\lambda$  от температуры для кислорода ( $C = 125^{\circ}$ ).

Оценим по порядку величины среднюю длину свободного пробега и среднее число столкновений в секунду. В § 92 мы установили, что молекулы имеют размеры порядка нескольких ангстрем. Примем эффективный радиус молекулы равным  $1 \text{ \AA}$ , т. е.  $10^{-10} \text{ м}$ . При нормальных условиях  $n$  равно числу Лошмидта, т. е.  $2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Подставив эти данные в формулу (111.4), получим:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-20} \cdot 2,68 \cdot 10^{25}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

При давлении  $10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$  (что соответствует примерно  $10^{-6} \text{ ат}$ )  $\lambda$  будет порядка  $10 \text{ см}$ . Следовательно, если сосуд имеет линейные размеры порядка нескольких сантиметров, то при таком давлении молекулы будут двигаться от стенки к стенке практически без столкновений друг с другом. При давлении  $10^{-6} \text{ мм рт. ст.}$   $\lambda$  достигает величины порядка десятков метров.

В таблице 8. приведены значения  $\lambda$  при нормальных условиях и эффективные диаметры молекул для некоторых газов.

Таблица 8

Газ	$\lambda$ , м при $0^\circ \text{ С}$ и $760 \text{ мм}$ <i>рт. ст.</i>	$d$ , $\text{\AA}$	Газ	$\lambda$ , м при $0^\circ \text{ С}$ и $760 \text{ мм}$ <i>рт. ст.</i>	$d$ , $\text{\AA}$
$\text{H}_2$	$1,10 \cdot 10^{-7}$	2,75	$\text{N}_2$	$0,59 \cdot 10^{-7}$	3,75
He	$1,75 \cdot 10^{-7}$	2,18	Воздух	$0,60 \cdot 10^{-7}$	3,74
$\text{O}_2$	$0,63 \cdot 10^{-7}$	3,64	$\text{CO}_2$	$0,39 \cdot 10^{-7}$	4,65

Число столкновений в секунду можно получить, разделив среднюю скорость молекул  $\bar{v}$  на  $\lambda$ . В § 106 мы получили для кислорода  $\bar{v}$  порядка  $500 \text{ м/сек}$ . Разделив эту величину на взятое из таблицы 8 значение  $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , получим, что число столкновений в секунду равно примерно  $8 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$ . Таким образом, при нормальных условиях число столкновений составляет несколько миллиардов в секунду. С уменьшением давления число столкновений убывает, изменяясь пропорционально  $p$ .



## § 112. Явления переноса. Вязкость газов

До сих пор мы рассматривали газ, находящийся в равновесном состоянии. Такое состояние характеризуется одинаковостью во всех точках занимаемого газом объема таких величин, как температура, давление, относительное количество молекул разного сорта и т. п. Теперь мы рассмотрим явления, возникающие при отклонениях газа от равновесия, причем ограничимся случаями, когда эти отклонения невелики. Подобные явления по причинам, которые выяснятся в дальнейшем, получили название явлений переноса. Мы рассмотрим только три таких явления — внутреннее трение или вязкость, теплопроводность и диффузию.

Отметим, что статистическая физика имеет дело только с равновесными состояниями тел. Наука, изучающая процессы, возникающие при нарушениях равновесия, носит название физической кинетики.

Рассмотрение явлений переноса мы начнем с вязкости газов. Если скорость  $u$  в потоке газа меняется от слоя к слою, то на границе между двумя смежными слоями (рис. 251) действует сила внутреннего трения, величина которой, как известно из механики, определяется эмпирической формулой:

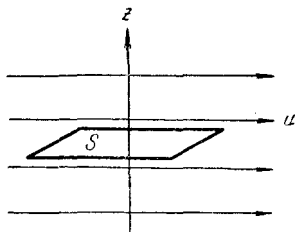


Рис. 251.

$$f = \eta \frac{du}{dz} S, \quad (112.1)$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости или коэффициент внутреннего трения,  $\frac{du}{dz}$  — градиент скорости, т. е. величина, показывающая, как быстро изменяется скорость движения газа  $u$  в направлении  $z$ , перпендикулярном к поверхности, разделяющей слои,  $S$  — величина поверхности, по которой действует сила  $f$ .

Чтобы понять происхождение силы внутреннего трения, рассмотрим два соприкасающихся слоя газа некоторой толщины  $\Delta z$ . Предположим, что слои движутся с различными скоростями  $u_1$  и  $u_2$  (рис. 252). Каждая молекула газа участвует в двух движениях: хаотическом

тепловом, средняя скорость которого равна  $\bar{v}$ , и упорядоченном движении со скоростью  $u$ , которая значительно меньше, чем  $\bar{v}$ . ( $\bar{v} \sim 10^3$  м/сек, скорость ветра при самом сильном урагане  $\sim 10^2$  м/сек).

Пусть в какой-то момент времени слои обладают импульсами  $K_1$  и  $K_2$ . Эти импульсы не могут оставаться неизменными, так как вследствие теплового движения происходит непрерывный переход молекул из одного слоя в другой. За время  $\Delta t$  через поверхность  $S$  переходит в обоих направлениях одинаковое количество молекул, равное

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \bar{v} S \Delta t \quad (112.2)$$

(мало существенным влиянием упорядоченного движения на величину скорости молекул можно пренебречь).

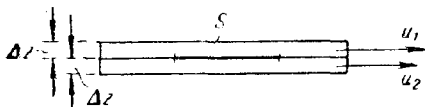


Рис. 252.

Попав в другой слой, молекула претерпевает соударения с молекулами этого слоя, в результате чего она либо отдает избыток своего импульса другим молекулам (если она прилетела из слоя, движущегося с большей скоростью), либо увеличивает свой импульс за счет других молекул (если она прилетела из слоя, движущегося с меньшей скоростью). В итоге импульс более быстро движущегося слоя убывает, а более медленно движущегося — возрастает.

Например, из первого слоя уносится молекулами за время  $\Delta t$  импульс, равный

$$\Delta K'_1 = \Delta N m u_1,$$

где  $\Delta N$  определяется формулой (112.2),  $m$  — масса молекулы.

Одновременно в этот слой привносится импульс

$$\Delta K''_1 = \Delta N m u_2.$$

Следовательно, за время  $\Delta t$  импульс первого слоя получает приращение, равное

$$\Delta K_1 = \Delta K''_1 - \Delta K'_1 = \Delta N m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \bar{v} m (u_2 - u_1) S \Delta t.$$

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что импульс второго слоя получает при этом приращение

$$\Delta K_2 = -\Delta K_1.$$

Основываясь на связи между изменением импульса и силой, можно утверждать, что движение слоев происходит таким образом, как если бы по поверхности  $S$  на первый слой действовала сила

$$f_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} m (u_2 - u_1) S, \quad (112.3)$$

а на второй слой — сила

$$f_2 = -f_1 = \frac{1}{6} n \bar{v} m (u_1 - u_2) S.$$

Из формулы (112.3) следует, что сила, с которой взаимодействуют два смежных слоя, равна импульсу, переносимому молекулами через поверхность раздела за секунду.

Чтобы получить окончательную формулу для силы трения, нужно учесть, что скорость не может, как мы предполагали, изменяться скачком на границе двух слоев, а изменяется непрерывно в перпендикулярном к слоям направлении  $z$  [ $u = u(z)$ , см. рис. 253].

Каждая молекула, пролетающая через поверхность  $S$ , переносит импульс, определяемый значением скорости  $u$  в том месте, где произошло последнее столкновение молекулы. Через поверхность  $S$  будут пролетать молекулы, претерпевшие соударение на самых различных расстояниях  $l$  от  $S$ , причем вероятность различных  $l$  определяется формулой (111.1). В среднем последнее соударение происходит на расстоянии от  $S$ , равном средней длине свободного пробега  $\lambda$  (рис. 253). Поэтому молекулам,

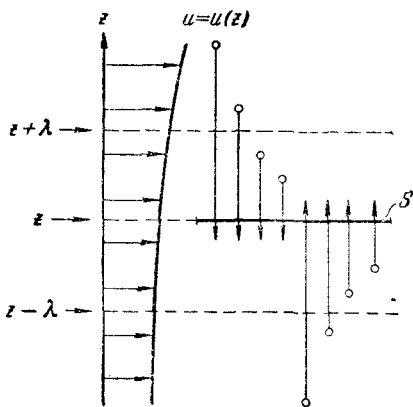


Рис. 253.

пролетающим через  $S$  в направлении сверху вниз (на рисунке), нужно приписать значение скорости в сечении с координатой  $z + \lambda$ , а молекулам, пролетающим в направлении снизу вверх, — значение скорости в сечении с координатой  $z - \lambda$ <sup>1)</sup>. Поскольку  $\lambda$  очень мала, эти скорости можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u(z + \lambda) &= u(z) + \frac{du}{dz} \lambda, \\ u(z - \lambda) &= u(z) - \frac{du}{dz} \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (112.4)$$

где  $u(z)$  — скорость газа в том сечении, где мы мысленно расположили поверхность раздела  $S$ ,  $\frac{du}{dz}$  — значение производной в том же сечении.

Теперь силу трения можно вычислить по формуле (112.3), подставив вместо  $u_1$  и  $u_2$  значения (112.4):

$$f = \frac{1}{6} n \bar{v} m \left( \frac{du}{dz} 2\lambda \right) S.$$

Учитывая, что  $nm$  равно плотности газа  $\rho$ , последнюю формулу можно написать в виде

$$f = \left( \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \right) \frac{du}{dz} S. \quad (112.5)$$

Сравнение (112.5) с эмпирической формулой (112.1) показывает, что, исходя из газокинетических представлений, нам удалось не только прийти к правильной зависимости  $f$  от  $\frac{du}{dz}$  и  $S$ , но и получить выражение для коэффициента вязкости  $\eta$ . Действительно, из их сопоставления вытекает, что

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda. \quad (112.6)$$

Более строгий расчет, учитывающий ряд факторов, которыми мы пренебрегли, приводит к такой же формуле, но с несколько отличным числовым коэффициентом.

Исследуем полученное нами выражение (112.6) для коэффициента вязкости газов. Заменяя  $\rho$  на  $nm$  и учитывая, что средняя скорость  $\bar{v}$  пропорциональна  $\sqrt{T/m}$ ,

<sup>1)</sup> Это подтверждается точным расчетом, произведенным с учетом распределения молекул по длинам свободного пробега  $l$ .

а средняя длина свободного пробега  $\lambda$  пропорциональна  $1/nd^2$ , можно написать:

$$\eta \sim nm \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{1}{nd^2} \sim \frac{V\bar{m}}{\sigma} \sqrt{T}. \quad (112.7)$$

Прежде всего обращает на себя внимание, что  $\eta$  не зависит от числа молекул в единице объема, а следовательно, и от давления ( $p = nkT$ ). Этот, на первый взгляд, удивительный результат имеет следующее объяснение. С понижением давления уменьшается  $n$ , т. е. число молекул, участвующих в переносе импульса. Одновременно растет  $\lambda$ , а значит, и различие в импульсах, переносимых одной молекулой в противоположных направлениях. В итоге получается, что суммарный импульс, переносимый молекулами при данном градиенте скорости  $\frac{du}{dz}$ , не зависит от давления. Это справедливо лишь до тех пор, пока  $\lambda$  остается малой по сравнению с размерами зазора, в котором течет газ (например, по сравнению с диаметром трубы). По мере того как перестает выполняться это условие, вязкость начинает все больше зависеть от давления, уменьшаясь с его понижением. Когда средняя длина пробега становится сравнимой с размерами зазора, в котором течет газ, пробег молекул будет определяться величиной зазора и  $\lambda$  перестает зависеть от давления. Число же молекул в единице объема при уменьшении давления продолжает убывать, вследствие чего уменьшается и  $\eta$ .

Согласно (112.7) коэффициент вязкости должен расти с температурой пропорционально  $\sqrt{T}$ . В таблице 9 приведены полученные экспериментально значения вязкости воздуха при различных температурах. Если бы  $\eta$  изменялся пропорционально  $\sqrt{T}$ , отношение  $\eta/\sqrt{T}$  должно было бы оставаться постоянным. Как видно из таблицы, это отношение обнаруживает некоторое увеличение с ростом  $T$ , так что  $\eta$  возрастает несколько быстрее,

Таблица 9

$T, ^\circ\text{K}$	$\eta, \text{мкпз}$	$\eta/\sqrt{T}$
273	171	10,4
313	190	10,7
573	295	12,3
673	328	12,6
773	358	12,9

чем  $\sqrt{T}$ . Причиной этого служит отмечавшаяся в предыдущем параграфе зависимость средней длины свободного пробега от температуры.

Зависимость вязкости газа от массы молекул можно проверить на газах, молекулы которых, отличаясь по массе, обладают одинаковым эффективным сечением. Примером таких газов могут служить обычный и тяжелый водород (дейтерий). Атомы (а соответственно и молекулы) дейтерия имеют в 2 раза большую массу, чем атомы обычного водорода. Электрические же свойства молекул водорода и дейтерия примерно одинаковы. Поскольку взаимодействие между молекулами, а следовательно, и эффективное сечение, определяется электрическими свойствами молекул, дейтерий и водород обладают одинаковым эффективным сечением, и их коэффициенты вязкости должны при одной и той же температуре находиться в отношении  $\sqrt{2} : 1$ . Экспериментально было найдено, что  $\eta$  дейтерия превосходит  $\eta$  водорода в 1,39 раза, что весьма близко к теоретическому значению.

### § 113. Теплопроводность газов

Опытным путем установлено, что в случае, если в какой-либо среде вдоль некоторого направления  $z$  температура не остается постоянной, то вдоль этого направления устанавливается поток тепла, величина которого определяется формулой

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S, \quad (113.1)$$

где  $q$  — количество тепла, протекающее за единицу времени через площадку  $S$ , расположенную перпендикулярно к оси  $z$ ,  $\frac{dT}{dz}$  — градиент температуры,  $\kappa$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и называемый коэффициентом теплопроводности. Размерность  $q$  равна  $\text{дж/сек}$  (или  $\text{эрг/сек}$ ,  $\text{кал/сек}$  и т. д.). Следовательно,  $\kappa$  имеет размерность  $\text{дж/м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ . Знак «—» в (113.1) отражает то обстоятельство, что направление, в котором возрастает температура, и направление, в котором течет тепло, противоположны, т. е. что тепло течет в направлении убывания температуры. Поток тепла в (113.1) — величина

алгебраическая: если тепло течет в положительном направлении оси  $z$ ,  $q$  положительно, если же тепло течет в отрицательном направлении оси  $z$ , то  $q$  отрицательно (рис. 254).

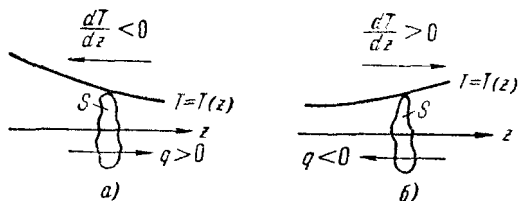


Рис. 254.

Чтобы вычислить количество тепла  $Q$ , протекающее через площадку  $S$  за время  $t$ , нужно  $q$  умножить на  $t$ :

$$Q = qt = -\kappa \frac{dT}{dz} St. \quad (113.2)$$

Попробуем вычислить поток тепла в газе, основываясь на молекулярно-кинетических представлениях. Если температура газа в разных точках различна, то и средняя энергия молекул в этих точках также будет различна. Перемещаясь вследствие теплового движения из одних мест в другие, молекулы переносят запасенную ими энергию. Этот перенос энергии и обуславливает процесс теплопроводности в газах.

Рассмотрим газ, в котором каким-то способом поддерживается непостоянство температуры вдоль направления, которое мы обозначим буквой  $z$ . Представим мысленно площадку  $S$ , перпендикулярную к этому направлению (рис. 255). Количество молекул, пролетающих через площадку  $S$  в направлении ее нормали, определяется, как мы знаем, выражением

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} n \bar{v} S. \quad (113.3)$$

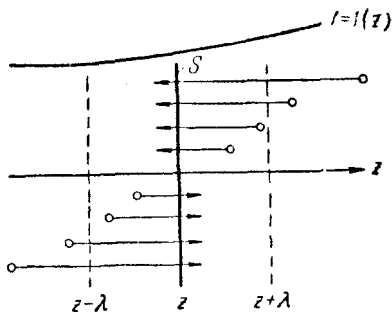


Рис. 255.

Каждая молекула несет с собой энергию, соответствующую температуре в том месте, где произошло последнее соударение ее с другой молекулой. В среднем это соударение происходит на расстоянии от  $S$ , равном средней длине свободного пробега  $\lambda$ . Поэтому молекулам, летящим слева направо, следует приписывать энергию  $\epsilon_1$ , отвечающую температуре  $T_1$  в плоскости  $(z - \lambda)$ , молекулам же, летящим в противоположном направлении, — энергию  $\epsilon_2$ , отвечающую температуре  $T_2$  в плоскости  $(z + \lambda)$ .

Величины  $n$  и  $\bar{v}$  зависят от температуры. В связи с этим, казалось бы, следовало для нахождения числа молекул, летящих через площадку  $S$  слева направо, подставлять в формулу (113.3) значения  $n$  и  $\bar{v}$ , отвечающие температуре  $T_1$ , а для нахождения числа молекул, летящих справа налево, — значения  $n$  и  $\bar{v}$ , отвечающие температуре  $T_2$ . Однако легко сообразить, что числа частиц, летящих через площадку  $S$  во встречных направлениях, не могут быть различными. Если бы они оказались неодинаковыми, то кроме потока тепла через площадку  $S$  наблюдался бы поток вещества — происходило бы перемещение газа из одной части пространства в другую. Мы же предполагаем, что движение газа, как целого, отсутствует.

Число молекул, пролетающих через  $S$  в каждом из направлений, найдем по формуле (113.3), приняв для  $n$  и  $\bar{v}$  их значения в сечении  $S$ . Тогда количество энергии, переносимое молекулами за секунду через площадку  $S$  в положительном направлении оси  $z$ , можно записать следующим образом:

$$q = \frac{dN}{dt} (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2) = \frac{1}{6} n \bar{v} S \left( \frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right) = \\ = \frac{1}{6} n \bar{v} S \frac{i}{2} k (T_1 - T_2). \quad (113.4)$$

В силу малости  $\lambda$  можно считать, что

$$T_1 = T - \frac{dT}{dz} \lambda, \quad T_2 = T + \frac{dT}{dz} \lambda,$$

где  $T$  — температура в том месте, где расположена площадка  $S$ ,  $\frac{dT}{dz}$  — производная  $T$  по  $z$  в том же месте.



Подставив эти значения в формулу (113.4), получим:

$$q = -\frac{1}{6} n \bar{v} S \frac{i}{2} k \frac{dT}{dz} 2\lambda.$$

Умножим и разделим это выражение на массу молекулы  $m$  и на число Авогадро  $N_A$ :

$$q = -\frac{1}{6} mn \bar{v} S \frac{i}{2} \frac{kN_A}{mN_A} \frac{dT}{dz} 2\lambda.$$

Далее, учитывая, что  $mn = \rho$ , а

$$\frac{i}{2} \frac{kN_A}{mN_A} = \frac{1}{\mu} \frac{i}{2} R = \frac{1}{\mu} C_V = c_V$$

( $c_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме), можно написать:

$$q = -\left(\frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda c_V\right) \frac{dT}{dz} S. \quad (113.5)$$

Сопоставление (113.5) с (113.1) дает для коэффициента теплопроводности газов следующее выражение:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda c_V. \quad (113.6)$$

Сравнив формулу (112.6) для  $\eta$  с формулой (113.6) для  $\kappa$ , замечаем, что

$$\kappa = \eta c_V. \quad (113.7)$$

Более строгий расчет приводит к следующему соотношению между  $\kappa$  и  $\eta$ :

$$\kappa = K \eta c_V,$$

где  $K$  — числовой коэффициент, определяемый формулой

$$K = \frac{9\gamma - 5}{4}.$$

Таким образом, для одноатомных газов ( $\gamma = C_p/C_V = 5/3$ ) коэффициент  $K = 2,5$ , для двухатомных газов ( $\gamma = 7/5$ )  $K = 1,9$  и т. д.

Выясним зависимость  $\kappa$  от величин, характеризующих молекулу, и от параметров газа. Поскольку  $\kappa \sim \eta c_V$ , для этого достаточно умножить (112.7) на величины, входящие в выражение для  $c_V$ :

$$c_V = \frac{1}{\mu} C_V = \frac{1}{mN_A} \frac{i}{2} R \sim \frac{i}{m}.$$

В результате получается

$$\kappa \sim \frac{i}{\sigma \sqrt{m}} \sqrt{T}. \quad (113.8)$$

Эта зависимость отличается от зависимости (112.7) для  $\eta$  тем, что  $\kappa$  обратно пропорционален  $\sqrt{m}$ , в то время как  $\eta$  прямо пропорционален  $\sqrt{m}$ . Кроме того,  $\kappa$  зависит от числа и характера степеней свободы молекулы (от числа  $i$ ). Зависимость от давления и температуры у  $\kappa$  такая же, как и у  $\eta$ . Следовательно, коэффициент теплопроводности не зависит от давления (до тех пор, пока  $\lambda$  не становится того же порядка, что и линейный размер сосуда, вдоль которого передается тепло) и возрастает с температурой несколько быстрее, чем  $\sqrt{T}$ .

#### § 114. Диффузия в газах

Рассмотрим газовую смесь, состоящую из нескольких компонент, т. е. из молекул нескольких сортов. Число молекул  $i$ -й компоненты в единице объема обозначим  $n_i$ . Полное число молекул в единице объема будет равно

$$n = \sum n_i.$$

Относительной концентрацией  $i$ -й компоненты в смеси называется безразмерная величина

$$c'_i = \frac{n_i}{n}.$$

Очевидно, что сумма относительных концентраций всех компонент равна единице:

$$\sum c'_i = \sum \frac{n_i}{n} = 1.$$

Абсолютной концентрацией какой-либо компоненты называется масса молекул данного сорта, содержащаяся в единице объема. Определенная таким образом концентрация представляет собой парциальную плотность данной компоненты. Если масса молекулы  $i$ -й компоненты  $m_i$ , то абсолютная концентрация будет равна

$$c_i = n_i m_i.$$

Давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений отдельных компонент и определяется полным числом молекул в единице объема:

$$p = \sum p_i = \sum n_i kT = nkT.$$

Может случиться, что концентрация газовых компонент в различных точках пространства будет неодинакова. В этом случае вследствие теплового движения молекул будет происходить процесс выравнивания концентраций, сопровождающийся переносом массы  $i$ -й компоненты в направлении убывания ее концентрации. Этот процесс носит название диффузии.

Полное число молекул, а следовательно, и давление в процессе диффузии не изменяются. Происходит лишь перераспределение молекул разных сортов, т. е. изменение величин  $n_i$ , причем таким образом, что возрастание в каком-то месте  $n_i$  для одной из компонент сопровождается одновременным изменением  $n_i$  для других компонент, так что сумма  $n_i$  остается постоянной.

В дальнейшем в этом параграфе будет идти речь о двухкомпонентных газовых смесях.

Предположим, что в некотором объеме каким-то образом поддерживается не изменяющийся со временем градиент концентраций обеих компонент вдоль направления  $z$  (рис. 256, на котором вместо абсолютных концентраций изображены пропорциональные им числа молекул в единице объема). Давление во всем объеме одинаково. Следовательно, сумма  $n_1 + n_2$  в каждом сечении будет одна и та же. В этом случае через перпендикулярную к  $z$  площадку  $S$  устанавливается преимущественный поток молекул первого сорта в направлении слева направо, который можно охарактеризовать величиной массы  $M_1$ , переносимой через  $S$  за одну секунду. Опыт дает, что эта величина определяется следующим

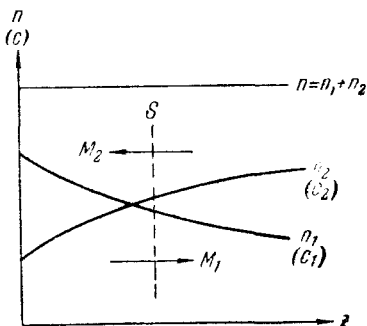


Рис. 256.

выражением:

$$M_1 = -D \frac{dc_1}{dz} S, \quad (114.1)$$

где  $D$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом диффузии,  $\frac{dc_1}{dz}$  — градиент абсолютной концентрации в том сечении, где мы мысленно расположили площадку  $S$ .

Масса, переносимая через площадку  $S$  за время  $t$ , очевидно, равна

$$M_1 t = -D \frac{dc_1}{dz} S t. \quad (114.2)$$

Одновременно будет существовать встречный поток молекул второго сорта, определяемый аналогичным выражением

$$M_2 = -D \frac{dc_2}{dz} S.$$

Уравнение (114.1) представляет собой эмпирическое уравнение диффузии. Знак «—» показывает, что масса переносится в направлении убывания концентрации данной компоненты.

Попытаемся получить уравнение диффузии, основываясь на молекулярно-кинетических представлениях, причем для упрощения расчетов мы будем считать, что молекулы обеих компонент мало отличаются по массе ( $m_1 \approx m_2 \approx m$ ) и имеют практически одинаковые эффективные сечения ( $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$ ). В этом случае молекулам обеих компонент можно приписывать одинаковую среднюю скорость теплового движения  $\bar{v}$ , а среднюю длину свободного пробега вычислять по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n},$$

где  $n = n_1 + n_2$ .

Пусть изменение концентрации первой компоненты вдоль оси  $z$  дается функцией  $c_1 = c_1(z)$ . Каждая молекула, пролетающая через площадку  $S$ , переносит присущую ей массу  $m$  (напомним, что  $m_1 \approx m$ ). Обозначим количество молекул первой компоненты, пролетающих за секунду через  $S$  в направлении оси  $z$ , через  $N'_1$ , то же число для направления, противоположного  $z$ , — через  $N''_1$ .

Тогда масса первой компоненты, переносимая за секунду в направлении  $z$ , может быть представлена в виде

$$M_1 = (N'_1 - N''_1) m. \quad (114.3)$$

Как и в предыдущих случаях (см. § 112 и 113), можно считать, что пересекающие площадку  $S$  молекулы прилетают из сечений, отстоящих от  $S$  на среднюю длину свободного пробега. Тогда количество молекул, пролетающих через  $S$  в направлении оси  $z$ , будет определяться значением числа молекул в единице объема  $n'_1$ , отвечающим сечению с координатой  $z - \lambda$ , а количество молекул, летящих в противоположном направлении, — значением  $n''_1$ , отвечающим сечению с координатой  $z + \lambda$ . Таким образом, числа  $N'_1$  и  $N''_1$  определяются выражением

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} S,$$

где для  $N'_1$  должно быть взято число  $n'_1 = n_1(z - \lambda)$ , а для  $N''_1$  — число  $n''_1 = n_1(z + \lambda)$ . Подставляя значения  $N'_1$  и  $N''_1$  в (114.3), получаем:

$$M_1 = -\frac{1}{6} \bar{v} S \frac{dn_1}{dz} 2\lambda m.$$

Поскольку  $m$  — постоянная величина, выражение  $m \frac{dn_1}{dz}$  можно записать в виде  $\frac{d(mn_1)}{dz}$ , что представляет собой градиент концентрации  $\frac{dc_1}{dz}$ . Тогда

$$M_1 = -\left(\frac{1}{3} \bar{v} \lambda\right) \frac{dc_1}{dz} S. \quad (114.4)$$

Сопоставляя (114.4) с (114.1), получаем газокинетическое выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda. \quad (114.5)$$

Из (114.5) вытекает что размерность  $D$  равна  $m^2/сек.$

Проведенные нами рассуждения в равной мере применимы к обеим компонентам смеси. Следовательно, коэффициент диффузии для обеих компонент имеет одинаковое значение.

Сравнивая (114.5) с (112.6), получаем следующую связь между  $\eta$  и  $D$ :

$$\eta = \rho D.$$

Подставив в (114.5) выражение для  $\bar{v}$  и  $\lambda$ , можно получить, что

$$D \sim \frac{1}{n\sigma\sqrt{m}} \sqrt{T}.$$

В отличие от  $\eta$  и  $\kappa$  коэффициент диффузии оказывается обратно пропорциональным числу молекул в единице объема, а следовательно, и давлению  $p$ :

$$D \sim \frac{1}{p}.$$

Зависимость от температуры у  $D$  такая же, как у  $\eta$  и  $\kappa$ .

Так как мы полагали молекулы обеих компонент одинаковыми по массе и эффективному сечению, (114.5) представляет собой, по существу, выражение для коэффициента самодиффузии, т. е. диффузии молекул некоторого газа в среде молекул того же газа. Явление самодиффузии можно было бы наблюдать, пометив каким-то способом часть молекул однородного газа. Тогда в случае, если бы концентрация меченых молекул и молекул, не несущих отметки, была непостоянна, в газе возникли бы встречные потоки разного рода молекул, причем величина потоков определялась бы формулой (114.4). Практически самодиффузию можно исследовать, применив метод меченых атомов. Этот метод состоит в использовании смеси изотопов, т. е. разновидностей атомов одного и того же элемента, отличающихся друг от друга, например, тем, что одна разновидность атомов радиоактивна, а другая — стабильна.

Для смеси молекул различной массы и сечения соответствующий расчет дает следующее выражение коэффициента диффузии:

$$D = B \sqrt{\frac{T}{m'}} \frac{1}{d_{12}^2 n},$$

где  $B$  — числовой коэффициент,  $m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  — так называемая приведенная масса молекул и  $d_{12} = \frac{d_1 + d_2}{2}$  — полусумма эффективных диаметров.

В случае, когда длина свободного пробега молекул превышает линейные размеры сосуда, говорят, что в сосуде достигнут вакуум. Газ в этом случае называют ультраразреженным. Хотя в буквальном смысле слова вакуум означает «пустоту», в ультраразреженном газе содержится в единице объема большое число молекул. Так, при давлении в  $10^{-6}$  мм рт. ст. в  $1 \text{ м}^3$  находится примерно  $10^{16}$  молекул. Более того, в очень малых порах состояние, определяемое как вакуум, может быть достигнуто и при атмосферном давлении.

Поведение ультраразреженных газов отличается целым рядом особенностей. В условиях вакуума нельзя говорить о давлении одной части газа на другую. При обычных условиях молекулы часто сталкиваются друг с другом. Поэтому по любой поверхности, которой можно мысленно разграничить газ на две части, будет происходить обмен импульсами между молекулами, и, следовательно, одна часть газа будет действовать по поверхности раздела на вторую с давлением  $p$ . В вакууме молекулы обмениваются импульсами только со стенками сосуда, так что имеет смысл лишь понятие давления газа на стенку. Внутреннее трение в газе также отсутствует. Однако тело, движущееся в ультраразреженном газе, будет испытывать действительные силы трения, обусловленные тем, что молекулы, ударяясь об это тело, будут изменять его импульс. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть в ультраразреженном газе движутся параллельно друг другу две пластинки (рис. 257). Скорости пластинок равны  $u_1$  и  $u_2$ . Взаимодействие между молекулой и пластинкой в момент удара приводит к тому, что молекула, отскочив от пластинки, имеет в дополнение к тепловой скорости составляющую, равную по величине и направлению скорости пластинки.

Об единицу поверхности верхней пластинки будет ударяться в секунду  $\frac{1}{6} n \bar{v}$  молекул, имеющих составляющую скорости  $u_2$ , приобретенную при предшествующем

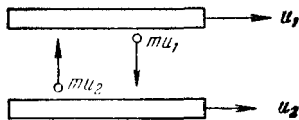


Рис. 257.

ударе о нижнюю пластинку. Каждая из этих молекул несет составляющую импульса  $mu_2$ . Отразившись от верхней пластинки, молекулы имеют составляющую импульса, равную  $mu_1$ . Следовательно, удар каждой молекулы о верхнюю пластинку приводит к уменьшению ее импульса на величину  $m(u_1 - u_2)$ . Изменение импульса в единицу времени, отнесенное к единице поверхности пластинки, составит:

$$\frac{1}{6} n \bar{v} m (u_1 - u_2).$$

Это изменение, как известно, равно силе, действующей на единицу поверхности пластинки:

$$f = \frac{1}{6} \rho \bar{v} (u_1 - u_2) \quad (115.1)$$

(мы заменили  $mn$  через  $\rho$ ).

Такая же по величине, но противоположно направленная сила действует на единицу поверхности нижней пластинки.

Коэффициент пропорциональности между силой трения и разностью скоростей пластинок естественно назвать коэффициентом трения. Как следует из (115.1), этот коэффициент равен  $\frac{1}{6} \rho \bar{v}$ , т. е. пропорционален плотности газа, а следовательно, и давлению газа на пластинку и стенки сосуда (для этого давления сохраняется выражение  $p = nkT$ ).

Обратимся теперь к вопросу о передаче тепла газом в условиях вакуума. Рассмотрим две пластинки с температурами  $T_1$  и  $T_2$ , между которыми находится

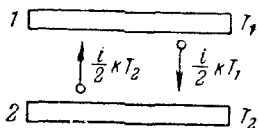


Рис. 258.

ультразреженный газ (рис. 258). Если бы удар молекул о поверхность твердого тела имел абсолютно упругий характер, молекулы отскакивали бы от пластинки с такой же по величине скоростью (а следовательно, и энергией), какую они имели перед ударом. В результате молекулы не могли бы переносить энергию от пластинки к пластинке. Однако такой вывод находится в противоре-



чи с опытом. Следовательно, взаимодействие между стенкой и ударяющейся о нее молекулой не имеет характера упругого удара. В действительности оно осуществляется так: ударившись о стенку, молекула как бы прилипает к ней на короткое время, после чего покидает стенку в совершенно произвольном направлении со скоростью, величина которой в среднем отвечает температуре стенки<sup>1)</sup>).

Обратимся снова к рис. 258. Каждая из  $\frac{1}{6} n\bar{v}S$  молекул, ударяющихся в секунду о верхнюю пластинку, приносит с собой энергию  $\frac{i}{2} kT_2$  и уносит энергию, равную  $\frac{i}{2} kT_1$ . Следовательно, каждый удар молекулы о пластинку приводит к потере пластинкой энергии  $\frac{i}{2} k(T_1 - T_2)$ . Такое же количество энергии получает при каждом ударе вторая пластинка. Таким образом, количество энергии, переносимое молекулами в секунду от пластинки к пластинке, будет равно

$$q = \frac{1}{6} n\bar{v} \frac{i}{2} k(T_1 - T_2) S.$$

Умножив и разделив это выражение на  $mN_A$ , получим:

$$q = \frac{1}{6} \rho \bar{v} c_V (T_1 - T_2) S. \quad (115.2)$$

Коэффициент теплопроводности, равный  $\frac{1}{6} \rho \bar{v} c_V$ , называется в ультраразреженном газе пропорциональным плотности газа. Следовательно, теплопередача от одной стенки к другой будет с понижением давления уменьшаться, в то время как теплопроводность газа при обычных условиях не зависит, как мы видели, от давления.

<sup>1)</sup> Отметим, что указанное уточнение характера взаимодействия молекул со стенкой не влияет на результаты, полученные нами в § 99 при вычислении давления. Если температура газа и стенки одинакова, то молекулы будут покидать стенку с такой же средней скоростью, с какой они ударяются о стенку, так что изменение импульса молекул в результате удара в среднем будет таким же, как при абсолютно упругом ударе.

Рассмотрим сосуд с ультраразреженным газом, разделенный на две части перегородкой с отверстием (рис. 259). Если размеры отверстия меньше длины свободного пробега, то молекулы будут пролетать через отверстие поодиночке без столкновений друг с другом.

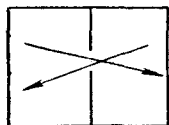


Рис. 259.

Истечение газа через отверстие в этих условиях называется эффузией.

При эффузии наблюдается ряд своеобразных явлений, два из которых будут нами рассмотрены. Для упрощения рассуждений будем предполагать разрежение газа в сосуде настолько большим, что длина свободного пробега превышает

линейные размеры сосуда. Тогда молекулы, пройдя через отверстие, будут двигаться по прямолинейным траекториям, пока не достигнут стенок сосуда.

Тепловая эффузия. Пусть стенки обеих частей сосуда поддерживаются при различных температурах  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 260). Когда длина свободного пробега  $\lambda$  значительно меньше диаметра отверстия  $d$  ( $\lambda \ll d$ ), условием равновесия газа, заполняющего сосуд, будет равенство давлений  $p_1$  и  $p_2$ . Поскольку давление равно  $nkT$ , числа молекул в единице объема, а следовательно, и плотность газа в обеих частях будут в этом случае находиться в отношении, обратном отношению температур:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (116.1)$$

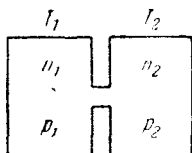


Рис. 260.

Для ультраразреженного газа ( $\lambda \gg d$ ) условия равновесия будут иными. Не изменяющееся со временем (стационарное) состояние установится в том случае, если число молекул, проходящих за секунду через отверстие из первой части сосуда во вторую, будет равно числу молекул, проходящих через отверстие в противоположном направлении. Так как число молекул, проходящих через отверстие, пропорционально  $n\bar{v}$ , условие равновесия имеет вид

$$n_1 \bar{v}_1 = n_2 \bar{v}_2.$$

Поскольку  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ , можно написать <sup>1)</sup>:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (116.2)$$

Таким образом, отношение плотностей газа оказывается иным, чем при обычных условиях (см. (116.1)).

Для давлений с учетом (116.2) получаем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1 k T_1}{n_2 k T_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

В отличие от обычных условий, когда равновесие наблюдается при равенстве давлений в обеих частях сосуда, в условиях вакуума давление оказывается больше в той части сосуда, у которой температура стенок выше.

Встречная изотермическая эффузия двух газов. Рассмотрим случай, когда температура сосуда всюду одинакова и предварительно в разных частях сосуда содержатся разные газы с сильно отличающимися по массе молекулами. Для определенности возьмем в левой части водород ( $M = 2$ ), в правой — кислород ( $M = 32$ ). Пусть давление водорода  $p_1$  в 2 раза меньше, чем давление кислорода  $p_2$ .

Следовательно,  $n_2$  кислорода в 2 раза превышает  $n_1$  водорода:  $n_2 = 2n_1$ . Сами давления таковы, что  $\lambda$  обоих газов больше линейных размеров сосуда.

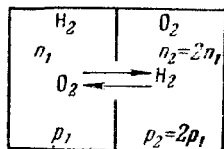


Рис. 261.

Если открыть отверстие в перегородке, то возникнут встречные эффузионные потоки кислорода и водорода через отверстие (рис. 261). Поток молекул водорода будет пропорционален  $n_1 \bar{v}_1$ , поток молекул кислорода пропорционален  $n_2 \bar{v}_2$ . Поскольку  $\bar{v} \sim 1/\sqrt{m}$ , средняя скорость молекул водорода будет в 4 раза больше  $\bar{v}$  для кислорода:  $\bar{v}_1 = 4\bar{v}_2$ . В результате получается, что хотя давление в сосуде с водородом меньше, чем в сосуде с кислородом, поток молекул водорода будет в 2 раза больше потока молекул кислорода. Вместо выравнивания давлений эффузионные потоки приведут к возрастанию различия в давлениях. Правда, со временем

<sup>1)</sup> В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, мы принимаем, что молекула, ударившись о стенку сосуда, отскакивает со скоростью, соответствующей температуре стенки.

произойдет выравнивание концентраций водорода и кислорода в обеих частях сосуда (вначале это произойдет для более быстрых молекул, т. е. для водорода, позже закончится выравнивание концентраций кислорода) и,

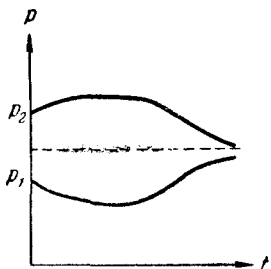


Рис. 262.

в конце концов, давления выравниваются. Изменение во времени давлений  $p_1$  и  $p_2$  в обеих частях сосуда изображено графически на рис. 262.

Явление эффузии используется для разделения газовых смесей, компоненты которых отличаются только тем, что в состав их молекул входят разные изотопы (разновидности атомов) одних и тех же химических элементов.

Вследствие тождественности химических свойств изотопов осуществить их разделение химическими способами не удается.

Принцип эффузионного<sup>1)</sup> способа разделения показан на рис. 263. Поток газовой смеси (обозначенный на рисунке символом «O») разветвляется на две части, одна из которых пропускается через перегородку с мелкими порами ( $\lambda > >$  размеров пор). Поскольку молекулы с меньшей массой обладают большей средней скоростью теплового движения, поток, прошедший через перегородку, будет несколько обогащен легкими молекулами по сравнению с первоначальным потоком. Этот обогащенный поток (поток 1') снова делится на две части, одна из которых, пройдя через вторую пористую перегородку, обогащается дополнительно более легкими молекулами. В результате многократного повторения такого процесса удастся получить газ, молекулы которого содержат преимущественно более легкий изотоп соответствующего химического элемента.

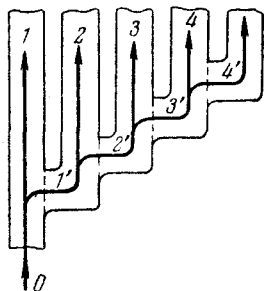


Рис. 263.

<sup>1)</sup> Исторически за этим методом укоренилось не вполне точное название: диффузионный метод разделения изотопов.

# ГЛАВА XIII

## РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

### § 117. Отклонение газов от идеальности

Как уже отмечалось, поведение реальных газов довольно хорошо описывается уравнением (98.14)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

только при не слишком высоких давлениях и достаточно высоких температурах. С повышением давления и уменьшением температуры наблюдаются значительные отступления от уравнения. Во втором столбце таблицы 10 приведены значения произведения  $pV$  для массы

Таблица 10

<i>p, ат</i>	<i>pV, ат·л</i>	$(p + \frac{a'}{V^2})(V - b')$ , ат·л
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,069	0,893

азота, занимающей при нормальных условиях объем, равный одному литру. Указанные значения даны для различных давлений и одной и той же температуры 0° С.

В соответствии с уравнением (98.14) произведение  $pV$  при неизменной температуре должно оставаться постоянным. В действительности, как видно из таблицы,

при давлениях порядка 200 ат наблюдаются заметные отклонения, которые, непрерывно возрастая с увеличением давления, достигают при 1000 ат более 100%. Эти отклонения не представляются удивительными, поскольку при выводе уравнения (98.14) мы пренебрегали размерами молекул и их взаимодействием друг с другом на расстоянии. Вместе с тем при повышении давления возрастает плотность газа, что приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами; поэтому объем молекул и взаимодействие между ними начинают играть существенную роль.

Согласно произведенной нами оценке (см. § 92) размеры молекул имеют порядок  $10^{-8}$  см. Принимая радиус молекулы  $r$  равным  $10^{-8}$  см, для объема одной молекулы получим значение

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} 3,14 \cdot 10^{-24} \approx 4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3.$$

Следовательно, объем молекул, содержащихся в 1 см<sup>3</sup> газа при нормальных условиях, составит примерно:

$$4 \cdot 10^{-24} \cdot 2,7 \cdot 10^{19} \approx 10^{-4} \text{ см}^3.$$

Этим объемом вполне можно пренебречь по сравнению с объемом газа (1 см<sup>3</sup>).

Если бы газ следовал уравнению (98.14), то при повышении давления до 5000 ат его плотность увеличилась бы в 5000 раз и объем молекул в 1 см<sup>3</sup> составил бы  $10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^3 = 0,5 \text{ см}^3$ . Таким образом, на долю молекул приходилась бы половина всего занимаемого газом объема. Доступным для движения молекул оказался бы объем в 2 раза меньший, чем при атмосферном давлении. Совершенно очевидно, что при этих условиях обратная пропорциональность объема давлению должна нарушаться.

Характер взаимодействия между молекулами лучше всего показать с помощью приведенной на рис. 264 кривой, изображающей взаимную потенциальную энергию двух молекул как функцию расстояния  $r$  между их центрами. При построении этой кривой потенциальная энергия молекул, находящихся на бесконечно большом расстоянии друг от друга (т. е. когда они не взаимодействуют), положена равной нулю. Следовательно, кривая

идет так, что при  $r$ , стремящемся к бесконечности, асимптотически приближается к оси  $r$ .

Зная потенциальную энергию как функцию  $r$ , можно определить силу, с которой взаимодействуют молекулы на разных расстояниях друг от друга. Для этого

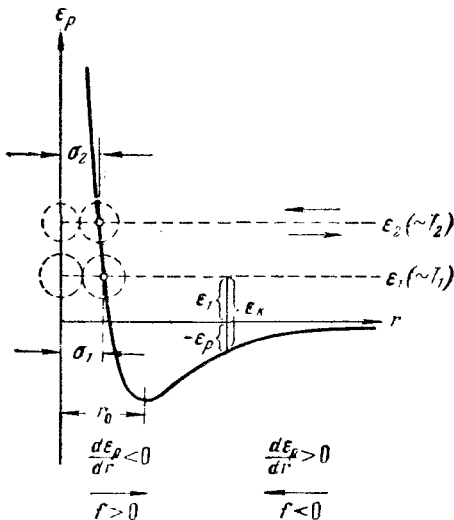


Рис. 264.

нужно воспользоваться известным из механики соотношением

$$f_r = - \frac{\partial \epsilon_p}{\partial r}.$$

Знак «—» здесь отражает то обстоятельство, что силы, с которыми взаимодействуют молекулы, стремятся перевести их в состояние с наименьшей потенциальной энергией. Следовательно, на расстояниях, превышающих  $r_0$ , между молекулами действуют силы взаимного притяжения, а на расстояниях, меньших  $r_0$ , — силы отталкивания. Крутизна хода кривой в соответствующем месте дает величину силы.

Рассмотрим с помощью кривой  $\epsilon_p$  процесс сближения (соударения) молекул. Поместим мысленно центр одной из молекул в начало координат, а центр второй

молекулы представим перемещающимся по оси  $r$ . Пусть вторая молекула летит по направлению к первой из бесконечности, имея начальный запас кинетической энергии  $\epsilon_h = \epsilon_1$ . Приближаясь к первой молекуле, вторая под действием силы притяжения движется со все возрастающей скоростью. В результате кинетическая энергия молекулы  $\epsilon_h$  также растет. Однако полная энергия системы, равная  $\epsilon = \epsilon_h + \epsilon_p$ , остается неизменной (система двух молекул замкнута) и равной  $\epsilon_1$ , так как одновременно уменьшается потенциальная энергия  $\epsilon_p$ . При прохождении молекулой точки с координатой  $r_0$  силы притяжения сменяются силами отталкивания, вследствие чего молекула начинает быстро терять скорость (в области отталкивания кривая  $\epsilon_p$  идет очень круто). В момент, когда потенциальная энергия  $\epsilon_p$  становится равной полной энергии системы  $\epsilon_1$ , скорость молекулы обращается в нуль. В этот момент имеет место наибольшее сближение молекул друг с другом. Минимальное расстояние  $d_1$ , на которое могут сблизиться центры молекул, представляет собой эффективный диаметр молекулы. После остановки молекулы все явления протекают в обратной последовательности: сначала молекула движется со все возрастающей скоростью под действием силы отталкивания; миновав расстояние  $r_0$ , молекула попадает под действие замедляющей ее движение силы притяжения и, наконец, удаляется на бесконечность, имея первоначальный запас кинетической энергии  $\epsilon_1$ .

Из рис. 264 видно, что в случае, когда молекула начинает свое движение из бесконечности с большим запасом энергии  $\epsilon_2$ , минимальное расстояние  $d_2$ , на которое сближаются центры молекул, оказывается меньшим. Таким образом, эффективный диаметр молекул зависит от их средней энергии, а следовательно, и от температуры. С повышением температуры эффективный диаметр молекул  $d$  уменьшается, вследствие чего средняя длина свободного пробега  $\lambda$  растет [см. (111.7)].

Характер взаимодействия между молекулами, предполагавшийся при выводе уравнения состояния идеального газа, соответствует потенциальной кривой, изображенной на рис. 265. На расстояниях, превышающих  $r_0$ ,  $\epsilon_p$  постоянна, вследствие чего сила равна нулю. При  $r = r_0$   $\epsilon_p$  обращается в бесконечность, образуя потенциальный барьер, препятствующий сближению центров



молекул на расстояния, меньшие  $r_0$ . Такое упрощенное рассмотрение допустимо, если средние расстояния между молекулами в газе достаточно велики: при больших  $r$  кривая  $\epsilon_p$  на рис. 264 идет очень полого, вследствие чего  $\frac{\partial \epsilon_p}{\partial r} \approx 0$ . По мере же уменьшения среднего расстояния между молекулами, т. е. при увеличении плотности газа, роль сил притяжения между молекулами все больше растет. Одновременно, как мы видели выше, сокращается та часть занимаемого газом объема, в пределах которой может происходить движение молекул.

Из всего сказанного вытекает, что уравнение, правильно описывающее поведение газов при больших плотностях, должно учитывать, во-первых, взаимное притяжение молекул друг к другу и, во-вторых, конечную величину собственного объема молекул.

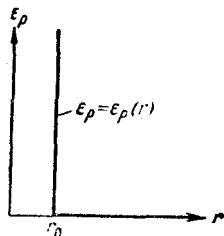


Рис. 265.

## § 118. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Из большого числа уравнений, предложенных для описания поведения реальных газов, самым простым и вместе с тем дающим достаточно хорошие результаты оказалось уравнение Ван-дер-Ваальса. Это уравнение получено путем внесения поправок в уравнение  $pV_{км} = RT$  и имеет следующий вид:

$$\left(p + \frac{a}{V_{км}^2}\right)(V_{км} - b) = RT, \quad (118.1)$$

где  $p$  — давление, оказываемое на газ извне (равное давлению газа на стенки сосуда),  $a$  и  $b$  — константы Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения, определяемые опытным путем. Если давление выражено в ньютонах на квадратный метр, а объем — в кубических метрах на kilomоль, то константа  $a$  имеет размерность  $\text{н} \cdot \text{м}^4/\text{кмоль}^2$ , а константа  $b$  —  $\text{м}^3/\text{кмоль}$ . Иногда константу  $a$  выражают в  $\text{ат} \cdot \text{л}^2/\text{моль}^2$ , а константу  $b$  — в  $\text{л}/\text{моль}$ .

Константа  $b$  определяет ту часть объема, которая недоступна для движения молекул вследствие их конечных размеров. Эта константа равна учетверенному объему молекул, что вытекает из следующих соображений. Пусть в сосуде имеется лишь две молекулы. Центр любой из этих молекул не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра молекулы  $d$  (рис. 266). Таким образом, для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса  $d$ , т. е. объем, равный восьми объемам молекулы. В расчете на одну молекулу недоступным оказывается объем, равный учетверенному объему

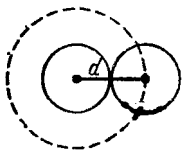


Рис. 266.

молекулы. Поскольку молекулы, как правило, сталкиваются попарно (вероятность столкновений трех и более молекул крайне мала), приведенное рассуждение справедливо для любой пары молекул. Отсюда следует, что в расчете на каждую из молекул газа недоступным будет объем, равный четырем объемам одной молекулы, а для всех молекул — объем, равный учетверенному суммарному объему молекул.

Поправка  $a/V_{\text{км}}^2$  дает внутреннее давление  $p_i$ , обусловленное взаимным притяжением молекул друг к другу. Если бы взаимодействие между молекулами вдруг прекратилось, то для того, чтобы удержать газ в пределах того же объема, понадобилось бы увеличить внешнее давление на величину, равную внутреннему давлению  $p_i$ . Обратная пропорциональность  $p_i$  квадрату объема объясняется следующими причинами. Вследствие быстрого убывания сил притяжения между молекулами с увеличением расстояния между ними, начиная с некоторого расстояния  $r$ , взаимодействием между молекулами можно вполне пренебречь. Расстояние  $r$  называется радиусом молекулярного действия. Сферу радиуса  $r$  называют сферой молекулярного действия. Проведем мысленно плоскость в газе (рис. 267) и попытаемся оценить силу, с которой притягивают друг друга части газа, лежащие по обе стороны от этой плоскости. Отне-



Рис. 267.

ся эту силу к единице поверхности, мы получим внутреннее давление.

Каждая из молекул, находящихся слева от воображаемой плоскости, испытывает притяжение со стороны тех молекул, находящихся справа от плоскости, которые попадают в пределы выступающей за плоскость части сферы молекулярного действия, описанной вокруг данной молекулы (эти молекулы обозначены на рис. 267 крестиками). Число таких молекул, а следовательно, и сила, действующая на каждую из молекул, лежащих слева от плоскости, пропорциональны числу молекул в единице объема  $n$ . Притяжение со стороны молекул, находящихся справа от плоскости, испытывают только те молекулы, находящиеся слева от плоскости, которые попадают в слой толщины  $r$ . Число этих молекул также пропорционально  $n$ . Таким образом, сила, с которой одна часть газа притягивает другую, а следовательно, и внутреннее давление оказываются пропорциональными  $n^2$ . Поскольку  $n$  обратно пропорционально объему газа, внутреннее давление будет обратно пропорционально квадрату объема.

Уравнение (118.1) написано для одного киломоля газа. Чтобы перейти к уравнению для произвольной массы газа  $m$ , соответствующей  $z$  киломолям газа ( $z = m/\mu$ ), нужно учесть, что  $z$  киломолей при тех же условиях занимают в  $z$  раз больший объем,

$$V = zV_{\text{км}}.$$

Заменяя в (118.1)  $V_{\text{км}}$  через  $V/z$ , получаем:

$$\left(p + \frac{z^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{z} - b\right) = RT.$$

Умножив это уравнение на  $z$  и введя обозначения

$$a' = z^2 a; \quad b' = zb, \quad (118.2)$$

приходим к уравнению Ван-дер-Ваальса для  $z$  молей:

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right) (V - b') = zRT. \quad (118.3)$$

Буквами  $a'$  и  $b'$  обозначены константы Ван-дер-Ваальса для  $z$  киломолей. Их связь с  $a$  и  $b$  дается соотношениями (118.2). Размерность  $a'$  равна  $n \cdot \text{м}^4$ , константа  $b'$  имеет размерность объема.

Насколько уравнение Ван-дер-Ваальса лучше передает поведение газов, чем уравнение (98.14), можно судить по данным, приведенным в таблице 10 (см. предыдущий параграф). В третьем столбце таблицы даны значения величины  $\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b')$ <sup>1)</sup> для той же массы азота, для которой даны во втором столбце значения  $pV$ . Как видно из таблицы, уравнение Ван-дер-Ваальса гораздо лучше согласуется с экспериментом, чем уравнение (98.14).

В соответствии с тем фактом, что все реальные газы с уменьшением плотности приближаются по своим свойствам к идеальному газу, уравнение Ван-дер-Ваальса в пределе, при стремлении объема к бесконечности переходит в уравнение (98.14). В этом можно убедиться, вынеся в уравнении (118.3)  $p$  и  $V$  за скобки:

$$pV \left(1 + \frac{1}{pV} \frac{a'}{V}\right) \left(1 - \frac{b'}{V}\right) = zRT,$$

и учитывая, что произведение  $pV$  остается примерно постоянным.

Раскрыв скобки в уравнении (118.3) и умножив полученное выражение на  $V^2$ , уравнение Ван-дер-Ваальса можно привести к виду

$$pV^3 - (b'p + zRT)V^2 + a'V = a'b'. \quad (118.4)$$

Получилось кубическое уравнение относительно  $V$ , коэффициенты которого зависят от параметров  $p$  и  $T$ . Кубическое уравнение со свободным членом и вещественными коэффициентами имеет три решения, причем в зависимости от соотношения между коэффициентами либо все три решения будут вещественными, либо одно решение — вещественным, а два — комплексными. Поскольку объем может быть только вещественным, комплексные решения не имеют физического смысла.

На рис. 268 изображены изотермы Ван-дер-Ваальса для нескольких значений температуры. При температуре  $T'$  и давлениях в пределах  $p'_1$  до  $p'_2$  коэффициенты в (118.4) таковы, что все три решения уравнения оказываются вещественными; при иных давлениях веществ-

<sup>1)</sup> В соответствии с (118.3) эта величина должна быть постоянной.

венным будет только одно решение. Различие между тремя вещественными решениями уравнения с повышением температуры уменьшается (ср. изотермы  $T'$  и  $T''$ ;  $T'' > T'$ ). Начиная с определенной, своей для каждого вещества температуры  $T_{кр}$  при любом давлении вещественным остается только одно решение уравнения (118.4).

Температура  $T_{кр}$  называется критической. Если повышать температуру, то точки, соответствующие решениям уравнения  $V'_1$ ,  $V'_2$  и  $V'_3$ , все больше сближаются, сливаясь при критической температуре в одну, обозначенную на рис. 268 буквой  $K$ . Точка  $K$  называется критической. Для соответствующей изотермы  $K$  служит точкой перегиба. Ей соответствуют три совпадающих вещественных решения уравнения (118.4). Касательная к критической изотерме в точке  $K$  является пределом, к которому стремятся секущие  $p'$ ,  $p''$  и т. д. при приближении температуры к критической. Следовательно, эта касательная, как и все секущие, параллельна оси  $V$ , так что производная  $\frac{dp}{dV}$  в точке  $K$  равна нулю. Кроме того, в точке перегиба должна быть равна нулю вторая производная  $\frac{d^2p}{dV^2}$ .

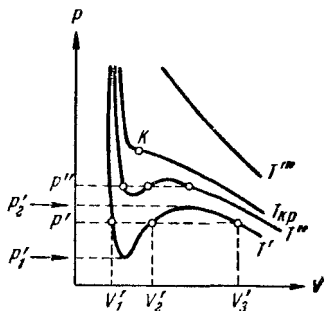


Рис. 268.

к которой стремится секущие  $p'$ ,  $p''$  и т. д. при приближении температуры к критической. Следовательно, эта касательная, как и все секущие, параллельна оси  $V$ , так что производная  $\frac{dp}{dV}$  в точке  $K$  равна нулю. Кроме того, в точке перегиба должна быть равна нулю вторая производная  $\frac{d^2p}{dV^2}$ .

Разрешим уравнение (118.1) относительно  $p$ :

$$p = \frac{RT}{V_{км} - b} - \frac{a}{V_{км}^2}. \quad (118.5)$$

Дифференцирование этого выражения по  $V_{км}$  дает:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dV_{км}} &= - \frac{RT}{(V_{км} - b)^2} + \frac{2a}{V_{км}^3}, \\ \frac{d^2p}{dV_{км}^2} &= \frac{2RT}{(V_{км} - b)^3} - \frac{6a}{V_{км}^4}. \end{aligned}$$

В критической точке, т. е. при подстановке  $T = T_{кр}$ ,  $V_{км} = V_{км.кр}$ , эти выражения должны обращаться

в нуль:

$$-\frac{RT_{кр}}{(V_{км.кр} - b)^2} + \frac{2a}{V_{км.кр}^3} = 0,$$
$$\frac{2RT_{кр}}{(V_{км.кр} - b)^3} - \frac{6a}{V_{км.кр}^4} = 0.$$

Совместно с (118.5), написанным для точки  $K_1$

$$p_{кр} = \frac{RT_{кр}}{V_{км.кр} - b} - \frac{a}{V_{км.кр}^2},$$

они образуют три уравнения с неизвестными  $p_{кр}$ ,  $V_{км.кр}$  и  $T_{кр}$ . Решение этой системы уравнений дает:

$$V_{км.кр} = 3b,$$

$$p_{кр} = \frac{a}{27b^2},$$

$$T_{кр} = \frac{8a}{27bR}.$$

Таким образом, зная константы Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$ , можно найти соответствующие критической точке  $V_{км.кр}$ ,  $p_{кр}$  и  $T_{кр}$ , которые называются критическими величинами. И, наоборот, по известным критическим величинам могут быть найдены значения констант Ван-дер-Ваальса.

Из выражений для критических величин вытекает, что

$$p_{кр}V_{км.кр} = \frac{3}{8}RT_{кр},$$

в то время как согласно уравнению состояния идеального газа должно было бы выполняться равенство

$$p_{кр}V_{км.кр} = RT_{кр}.$$

## § 119. Экспериментальные изотермы

Для того чтобы получить изотерму опытным путем, нужно взять вещество в газообразном состоянии, поместить его в сосуд с перемещающимся поршнем (рис. 269) и начать медленно сжимать, делая одновременные отсчеты давления и объема, а также следя за тем, чтобы температура вещества оставалась постоянной. Резуль-

таты подобных опытов для температуры ниже критической даны на рис. 270. Вначале с уменьшением объема давление газа <sup>1)</sup> растет, причем ход изотермы довольно хорошо описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Однако, начиная с некоторого значения объема  $V_T$ , экспериментальная изотерма перестает следовать уравнению (118.3). Начиная с этого значения объема, давление в сосуде перестает изменяться, само же вещество при этом перестает быть однородным: часть газа конденсируется в жидкость. Происходит, как говорят, расслоение вещества на две фазы: жидкую и газообразную. По мере дальнейшего уменьшения объема все большая часть вещества переходит в жидкую фазу, причем переход осуществляется при постоянном давлении, обозначенном на рисунке  $p_{н. п.}$ .

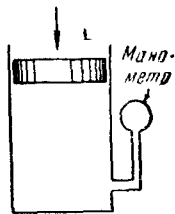


Рис. 269.

После того как процесс конденсации вещества в жидкость заканчивается (это происходит при достижении объема  $V_{ж}$ ), дальнейшее уменьшение объема начинает сопровождаться быстрым ростом давления. При этом ход изотермы снова примерно следует уравнению (118.3). Вещество в состояниях, соответствующих этому участку изотермы, снова будет однородным, но представляет собой не газ, а жидкость.

Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только газообразное состояние вещества, но охватывает также процесс перехода в жидкое состояние и процесс сжатия жидкости.

Сопоставление экспериментальной изотермы с изотермой Ван-дер-Ваальса дает, что эти изотермы довольно хорошо совпадают на участках, отвечающих однофазным состояниям вещества, но ведут себя совершенно различным образом в области расслоения на две фазы. Вместо S-образного завитка на изотерме Ван-дер-Ваальса экспериментальная изотерма имеет в этой области прямолинейный горизонтальный участок, который располагается так, что охватываемые завитком площади  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 270) одинаковы.

<sup>1)</sup> Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической иногда называют паром.

В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы, наблюдается равновесие между жидкой и газообразной фазами вещества. Газ (или пар), находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным паром. Давление  $p_{н.п.}$ , при котором может существовать равновесие при данной температуре, называется давлением (или упрогостью) насыщенного пара.

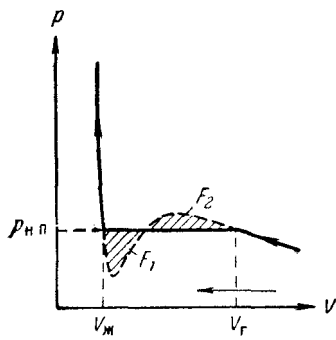


Рис. 270.

Газ (или пар), находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным паром. Давление  $p_{н.п.}$ , при котором может существовать равновесие при данной температуре, называется давлением (или упрогостью) насыщенного пара.

$V_г$  есть объем, занимаемый веществом в газообразном состоянии при давлении  $p_{н.п.}$ ;  $V_ж$  — объем вещества

в жидком состоянии при том же давлении. Назовем удельным объемом  $V'$  объем единицы массы вещества. Тогда, если масса вещества равна  $m$ , то удельные объемы насыщенного пара и жидкости при температуре  $T$  и давлении  $p_{н.п.}$  будут равны

$$V'_п = \frac{V_г}{m}; \quad V'_ж = \frac{V_ж}{m}. \quad (119.1)$$

При любом промежуточном значении объема  $V$  (рис. 271) часть вещества с массой  $m_ж$  будет находиться в жидком, а часть с массой  $m_п$  — в парообразном состоянии. Следовательно, на долю жидкости будет приходиться объем  $V'_ж m_ж$ , а на долю насыщенного пара — объем  $V'_п m_п$ . В сумме оба эти объема должны быть равны объему  $V$ :

$$V = V'_ж m_ж + V'_п m_п.$$

Подставляя сюда выражения (119.1) для удельных объемов и заменяя массу  $m$  суммой  $m_ж + m_п$ , получаем:

$$V = V_ж \frac{m_ж}{m_ж + m_п} + V_г \frac{m_п}{m_ж + m_п},$$

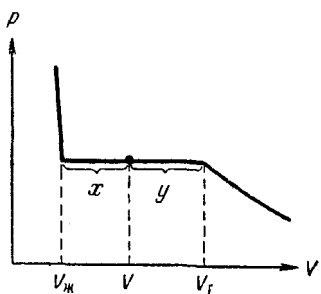


Рис. 271.



откуда

$$\frac{m_{ж}}{m_{п}} = \frac{V_{г} - V}{V - V_{ж}} = \frac{y}{x}.$$

Следовательно, отношение масс жидкости и насыщенного пара в двухфазном состоянии равно отношению

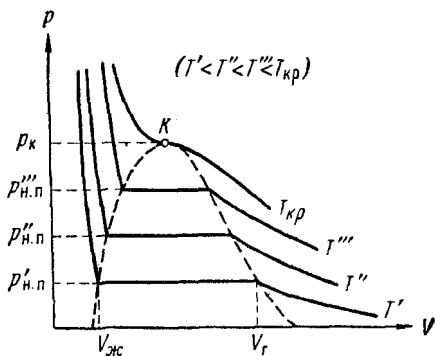


Рис. 272.

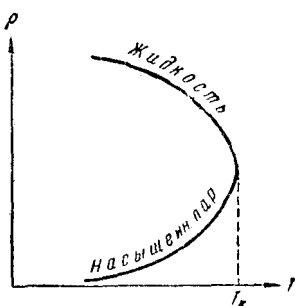


Рис. 273.

отрезков, на которые делит горизонтальный участок изотермы точка, изображающая состояние.

На рис. 272 приведены экспериментальные изотермы для нескольких значений температуры. Как видно из рисунка, с повышением температуры горизонтальный участок изотермы сокращается, стягиваясь в точку при критической температуре  $T_{кр}$ . В соответствии с этим уменьшается различие в удельных объемах, а следовательно, и плотностях жидкости и насыщенного пара. При критической температуре это различие полностью исчезает. Одновременно исчезает всякое различие между жидкостью и паром. Температурный ход плотности жидкости и насыщенного пара показан на рис. 273.

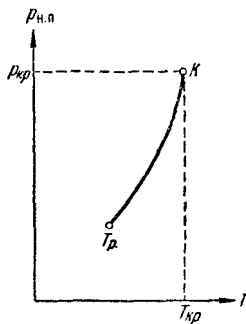


Рис. 274.

Из рис. 272 следует, что давление насыщенного пара растет с температурой, достигая в критической точке значения  $p_{кр}$ . Зависимость  $p_{н.п}$  от температуры дана на рис. 274. Кривая заканчивается в критической точке, так

как при температурах выше критической понятие насыщенного пара теряет смысл. Начинается кривая в так называемой тройной точке  $T_p$ , о которой речь пойдет в § 151.

Если провести линию через крайние точки горизонтальных участков изотерм (рис. 272), получается колоколообразная кривая, ограничивающая область двухфазных состояний вещества. При температурах выше критической вещество при любом давлении оказывается однородным. При таких температурах никаким сжатием не может быть осуществлено охлаждение вещества.

Понятие критической температуры впервые было введено Д. И. Менделеевым в 1860 г. Менделеев назвал ее температурой абсолютного кипения жидкости и рассматривал как ту температуру, при которой исчезают силы сцепления между молекулами и жидкость превращается в пар, независимо от давления и занимаемого ею объема.

Колоколообразная кривая и участок критической изотермы, лежащий слева от точки  $K$ , делят диаграмму ( $p, V$ ) на три области (рис. 275). Наклонной штриховкой помечена область однородных жидких состояний

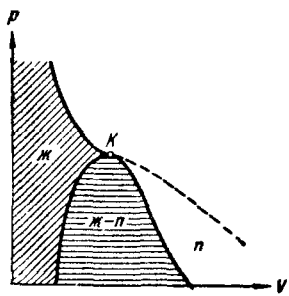


Рис. 275.

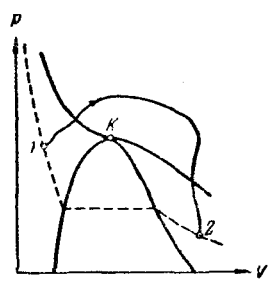


Рис. 276.

вещества. Под колоколообразной кривой располагается, как мы знаем, область двухфазных состояний и, наконец, область, лежащая справа от колоколообразной кривой и верхней ветви критической изотермы, представляет собой область однородных газообразных состояний вещества. В последней можно особо выделить часть, лежащую под правой ветвью критической изотермы, назвав ее областью пара. Любое состояние в этой обла-

сти отличается от остальных газообразных состояний в том отношении, что при изотермическом сжатии вещество, первоначально находившееся в таком состоянии, претерпевает процесс ожиджения. Вещество, находящееся в одном из состояний при температуре выше критической, не может быть ожиджено никаким сжатием. Подразделение газообразных состояний на газ и пар не является общепринятым.

Выбрав процесс перехода так, чтобы он не пересекал двухфазную область (рис. 276), можно осуществить переход из жидкого состояния в газообразное (или обратно) без расслаивания вещества на две фазы. В этом случае в процессе перехода вещество будет все время оставаться однородным.

### § 120. Пересыщенный пар и перегретая жидкость

Из сопоставления изотермы Ван-дер-Ваальса с экспериментальной изотермой мы выяснили, что вместо S-образного завитка 1—2—3—4 (рис. 277) экспериментальная изотерма имеет прямолинейный участок 1—4, соответствующий двухфазным состояниям вещества. Это объясняется неустойчивостью однородных состояний, отвечающих завитку 1—2—3—4. Неустойчивость состояний на участке 2—3 становится очевидной, если учесть, что на этом участке производная  $\frac{dp}{dV}$  положительна.

Следовательно, вещество, способное пройти последовательность состояний 2—3, обладало бы совершенно противоестественными свойствами: увеличение объема газа сопровождалось бы не уменьшением, а ростом давления.

На участках 1—2 и 3—4  $\frac{dp}{dV}$  отрицательно, так что, казалось бы, эти участки могли бы реализоваться. Действительно, при известных условиях состояния, соответствующие этим участкам, могут осуществляться. Правда, они не вполне устойчивы: достаточно, например,

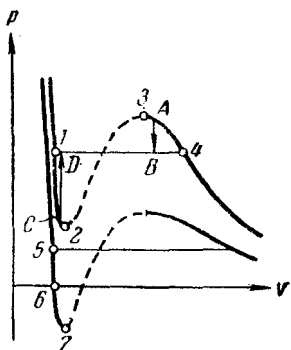


Рис. 277.

в состоянии  $A$  попадания в пар пылинки, чтобы все вещество распалось на две фазы и перешло в состояние  $B$  (см. указанный стрелкой переход  $A \rightarrow B$  на рис. 277). Подобные не вполне устойчивые состояния называются метастабильными. Вещество в состояниях 1—2 называется перегретой жидкостью, вещество в состояниях 3—4 называется пересыщенным паром.

При достаточно низких температурах нижняя часть завитка изотермы Ван-дер-Ваальса пересекает ось  $V$  и переходит в область отрицательных давлений (см. нижнюю изотерму на рис. 277). Вещество под отрицательным давлением, очевидно, находится в состоянии не сжатия, а растяжения. Такие состояния также могут быть при известных условиях реализованы. Таким образом, участок 5—6 на нижней изотерме соответствует перегретой, а участок 6—7 растянутой жидкости.

Рассмотрим условия, при которых могут быть осуществлены метастабильные состояния. Начнем с пересыщенного пара.

Если пар совершенно не содержит посторонних включений, конденсация его в жидкость начаться не может. Для образования капельки необходимо, чтобы большое количество молекул одновременно сблизилось на расстояния того же порядка, что и расстояния между молекулами в жидкости, а это совершенно невероятно. Для возникновения конденсации необходимо наличие так называемых центров конденсации, которые улавливают подлетающие к ним молекулы и переводят их в конденсированную фазу. Центрами конденсации могут служить пылинки, капельки жидкости и, в особенности, заряженные частицы (ионы).

Таким образом, если пар тщательно очистить от посторонних включений и ионов, то он может находиться при давлении, превышающем давление насыщенных паров  $p_{н.п}$  при данной температуре. Такое состояние будет метастабильным: достаточно возникнуть хотя бы одному центру конденсации, как состояние пересыщенного пара будет нарушено и вещество перейдет в двухфазное состояние.

Практически пересыщенный пар можно получить, подвергнув непересыщенный пар резкому расширению. Быстрое расширение происходит без теплообмена с внешней средой и сопровождается охлаждением пара.

Точка, изображающая состояние пара, перемещается при этом по адиабате. Адиабата, как было показано в § 103, идет круче, чем изотерма, вследствие чего пар из стабильного состояния 1, соответствующего температуре  $T_1$  (рис. 278), может перейти в метастабильное состояние 2, соответствующее более низкой температуре  $T_2$ . Такой процесс используется в камере Вильсона — приборе, предназначенном для наблюдения следов заряженных частиц (например,  $\alpha$ -частиц). Содержащийся в камере Вильсона воздух, насыщенный парами воды или спирта, подвергается резкому расширению. В результате воздух охлаждается и пары оказываются в состоянии пересыщения. Влетевшая в камеру частица вызывает ионизацию молекул на своем пути. Пересыщенный пар конденсируется на возникших ионах в мелкие капельки, образуя хорошо видимый след.

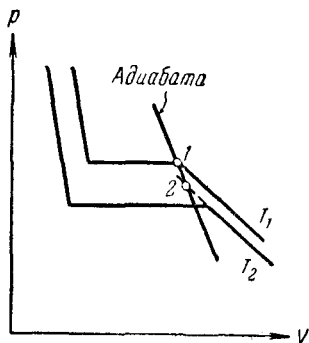


Рис. 278.

Рассмотрим условия получения перегретой жидкости. Процесс бурного парообразования (т. е. кипения) может, как и процесс конденсации, происходить на инородных включениях, например на песчинках или пузырьках газа, растворенного в жидкости. Если жидкость тщательно очистить от твердых включений и растворенных в ней газов, то путем нагревания ее можно перевести в состояние с давлением, меньшим  $p_{н.п}$  при данной температуре, без того, чтобы жидкость вскипала. Это и будет состояние перегретой жидкости.

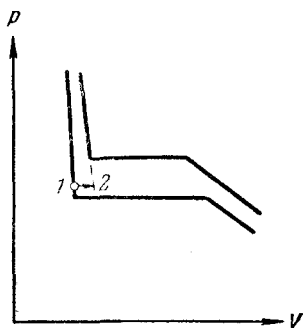


Рис. 279.

Переход жидкости из обычного состояния в перегретое показан на рис. 279 (см. показанный стрелкой переход 1—2). Состояние перегретой жидкости является

метастабильным. Достаточно бросить в перегретую жидкость песчинку для того, чтобы жидкость вскипела и вещество перешло в стабильное двухфазное состояние (см. переход  $C \rightarrow D$  на рис. 277).

Растянутую жидкость, например ртуть, можно получить следующим образом. Если погрузить в ртуть запаянную с одного конца длинную стеклянную трубку и, повернув ее запаянным концом вверх, осторожно вытаскивать наружу, то в такой трубке можно получить столб ртути, значительно превышающий 760 мм. Следовательно, ртуть в трубке будет удерживаться не силой атмосферного давления, а имеющимся между молекулами сцеплением. Ртуть в трубке будет находиться в состоянии растяжения, т. е. под отрицательным давлением.

### § 121. Внутренняя энергия реального газа

Взаимодействие между молекулами реального газа обуславливает их взаимную потенциальную энергию  $E_p$ , которая входит во внутреннюю энергию газа наряду с кинетической энергией движения молекул  $E_k$ :

$$U = E_k + E_p.$$

Кинетическая энергия молекул, содержащихся в киломоле газа, как мы знаем [см. (102.8)], равна  $E_k = C_V T$ , т. е. является функцией температуры. Взаимная потенциальная энергия молекул зависит от их среднего расстояния друг от друга. Поэтому  $E_p$  должна быть функцией объема газа  $V$ . Следовательно, внутренняя энергия реального газа оказывается функцией двух параметров:  $T$  и  $V$ .

При расширении газа должна быть совершена работа по преодолению сил притяжения между молекулами. Как известно из механики, работа против внутренних сил идет на увеличение потенциальной энергии системы. Подобно тому как работа против внешних сил определяется выражением  $d'A = p dV$ , работа против внутренних сил, действующих между молекулами киломоля газа, может быть записана в виде  $d'A = p_i dV_{\text{км}}$ , где  $p_i$  — внутреннее давление, равное в случае ван-дер-ваальсовского <sup>1)</sup> газа  $a/V_{\text{км}}^2$ . Приравняв  $d'A$  приращению

<sup>1)</sup> То есть газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса.

взаимной потенциальной энергии молекул  $dE_p$ , получим:

$$dE_p = p_i dV_{\text{км}} = \frac{a}{V_{\text{км}}^2} dV_{\text{км}}.$$

Интегрирование этого выражения дает для потенциальной энергии

$$E_p = - \frac{a}{V_{\text{км}}} + \text{const.}$$

Значение постоянной интегрирования следует выбрать так, чтобы выражение для внутренней энергии  $U$  в пределе, при возрастании объема до бесконечности, переходило в выражение для внутренней энергии идеального газа (напомним, что при увеличении объема все реальные газы приближаются по своим свойствам к идеальному газу). Исходя из этих соображений, постоянную интегрирования нужно положить равной нулю. Тогда для внутренней энергии реального газа получается следующее выражение:

$$U_{\text{км}} = C_V T - \frac{a}{V_{\text{км}}}, \quad (121.1)$$

из которого следует, что внутренняя энергия растет как при повышении температуры, так и при увеличении объема.

Если газ будет расширяться или сжиматься без теплообмена с внешней средой и без совершения внешней работы, то согласно первому началу термодинамики его внутренняя энергия должна оставаться постоянной. Для газа, энергия которого определяется формулой (121.1), должно при этом соблюдаться условие

$$dU_{\text{км}} = C_V dT + \frac{a}{V_{\text{км}}^2} dV_{\text{км}} = 0,$$

откуда следует, что  $dT$  и  $dV_{\text{км}}$  имеют разные знаки.

Следовательно, при расширении в таких условиях газ должен всегда охлаждаться, а при сжатии — нагреваться.

## § 122. Эффект Джоуля — Томсона

Пропуская газ по теплоизолированной трубке с пористой перегородкой, Джоуль и Томсон обнаружили, что при расширении, которым сопровождается прохождение газа через перегородку, температура его несколько

изменяется. В зависимости от начальных давления и температуры изменение температуры  $\Delta T$  имеет тот или иной знак и, в частности, может оказаться равным нулю. Это явление получило название эффекта Джоуля — Томсона. Если температура газа понижается ( $\Delta T < 0$ ), эффект считается положительным; если газ нагревается ( $\Delta T > 0$ ), эффект считается отрицательным.

Схема опыта показана на рис. 280. По трубке с крайне плохо проводящими тепло стенками устанавливалось стационарное (не изменяющееся со временем) течение

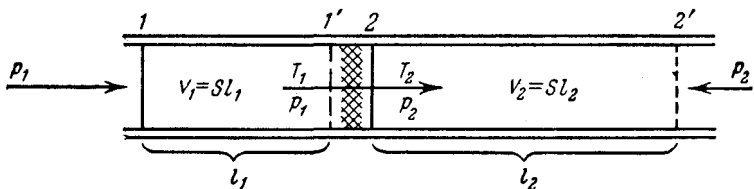


Рис. 280.

газа. В трубке имелась перегородка с мелкими порами (пробка из ваты), на которой происходил перепад давления от большого значения  $p_1$  до малого значения  $p_2$ , в результате чего газ сильно расширялся. Измерялась разность температур  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Выделим мысленно часть газа, ограниченную сечениями 1 и 2. По мере движения газа по трубке эти сечения перемещаются. Пусть спустя некоторое время они оказываются в положениях 1' и 2' соответственно. Поскольку за перегородкой та же порция газа занимает больший объем, чем перед перегородкой, сечение 2 переместится на больший отрезок, чем сечение 1. Напишем для выделенной порции газа уравнение первого начала термодинамики. Расширение газа происходит без теплообмена с внешней средой (адиабатически). Поэтому приращение внутренней энергии газа должно равняться совершенной над ним работе:

$$U_2 - U_1 = A'. \quad (122.1)$$

Работу над данной порцией газа совершает граничащий с ней газ. Слева на выделенную часть газа действует сила  $p_1 S$  ( $S$  — сечение трубки), направленная в сторону движения. Справа действует сила  $p_2 S$ , противодействующая движению. В итоге над рассматриваемой



порцией газа совершается работа:

$$A' = p_1 Sl_1 - p_2 Sl_2.$$

Замечая, что  $Sl_1$  есть объем  $V_1$ , занимаемый газом до расширения, а  $Sl_2$  — объем  $V_2$  после расширения, можно написать, что

$$A' = p_1 V_1 - p_2 V_2.$$

Подставив это выражение в (122.1), мы приходим к следующему соотношению:

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \quad (122.2)$$

Таким образом, в условиях опыта Джоуля — Томсона сохраняется не внутренняя энергия газа, а являющаяся функцией состояния величина  $U + pV$ <sup>1)</sup>.

Будем вести расчет для киломоля газа. После расширения газ имеет большой объем, так что его можно считать с достаточной степенью точности идеальным. Поэтому  $p_2 V_2$  можно положить равным  $RT_2$ , а  $U_2 = C_V T_2$ . В соответствии с (118.1)

$$p_1 V_1 = \left[ \frac{RT_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1^2} \right] V_1.$$

Для  $U_1$  нужно взять выражение (121.1). Подставив все эти выражения в (122.2) получаем:

$$C_V T_1 - \frac{a}{V_1} + \frac{RT_1 V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 + RT_2.$$

Третье слагаемое можно записать в виде

$$\frac{RT_1 V_1}{V_1 - b} = \frac{RT_1 (V_1 - b + b)}{V_1 - b} = RT_1 + \frac{RT_1 b}{V_1 - b}.$$

С учетом этого находим, что

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{C_V + R} \left( \frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (122.3)$$

Знак  $\Delta T$  определяется знаком выражения, стоящего в скобках. Нулевой эффект ( $\Delta T = 0$ ) получается при условии, что

$$\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} = 0. \quad (122.4)$$

1) В термодинамике эту функцию называют теплосодержанием, или энтальпией.

Уравнению (122.4) соответствует на плоскости  $(V_1, T_1)$  кривая, изображенная на рис. 281. Точки этой кривой определяют значения параметров  $T_1$  и  $V_1$ , при которых  $\Delta T = 0$ . Точки, лежащие выше кривой, определяют

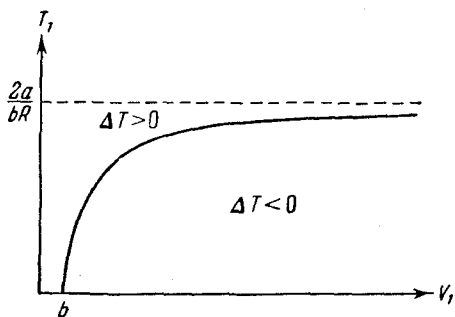


Рис. 281.

значения  $T_1$  и  $V_1$ , при которых  $\Delta T > 0$ , т. е. эффект отрицателен (при перемещении вверх от кривой первое слагаемое в скобках растет и скобка становится больше нуля).

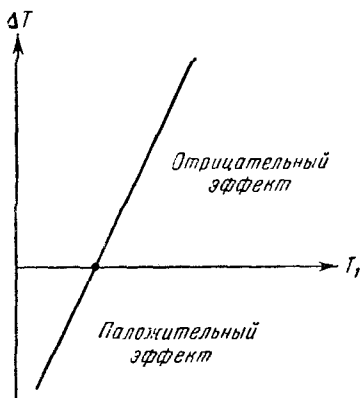


Рис. 282.

Точки, лежащие ниже кривой, определяют значения  $T_1$  и  $V_1$ , при которых эффект положителен ( $\Delta T < 0$ ). Кривая, описываемая уравнением (122.4), называется кривой инверсии.

Таким образом, знак и величина эффекта определяются начальной температурой и начальным объемом (или начальным давлением) газа.

При  $T_1 > \frac{2a}{bR}$  эффект

будет всегда отрицательным. При  $T_1 < \frac{2a}{bR}$  эффект получается положительным только при достаточно большом начальном объеме (т. е. при достаточно малом начальном давлении).

При данном начальном объеме (давлении) величина  $\Delta T$  линейно изменяется с начальной температурой  $T_1$

(рис. 282). Чем ниже начальная температура, тем сильнее охлаждается газ в результате эффекта Джоуля — Томсона.

Отметим, что эффект Джоуля — Томсона всецело обусловлен отклонениями газа от идеальности. Для идеального газа  $pV = RT$  и условие (122.2) превращается в

$$C_V T_1 + RT_1 = C_V T_2 + RT_2,$$

откуда следует, что  $T_1 = T_2$ .

### § 123. Ожижение газов

Для того чтобы ожижить газ, необходимо охладить его ниже критической температуры  $T_{кр}$ . Во втором столбце таблицы 11 приведены значения критической

Т а б л и ц а 11

Вещество	Критическая температура, °С	Температура кипения при атмосферном давлении, °С
Кислород . . . . .	—119	—183
Азот . . . . .	—147	—193
Водород . . . . .	—240	—253
Гелий . . . . .	—268	—269

температуры для некоторых газов<sup>1)</sup>. Как видно из таблицы, перевод таких газов, как кислород, азот, водород и гелий, в жидкое состояние требует сильного понижения их температуры. Один из промышленных методов ожижения газов (метод Линде) использует для охлаждения газа эффект Джоуля — Томсона.

На рис. 283 дана принципиальная схема метода Линде. Сжатый компрессором  $K$  газ проходит через холодильник  $X$ , в котором охлаждается до температуры, лежащей ниже точки инверсии. Это нужно для того, чтобы при последующем расширении газ в результате эффекта Джоуля — Томсона не нагревался, а охлаждался. Затем газ течет по внутренней трубке теплооб-

<sup>1)</sup> В обоих столбцах таблицы даны округленные значения температур.

менника *Т.О.* и, пройдя через дроссель *Др* (выполняющий те же функции, что и ватный тампон в опыте Джоуля — Томсона), сильно расширяется и охлаждается.

Теплообменник состоит из двух длинных трубок разных диаметров, вставленных одна в другую (для сокращения

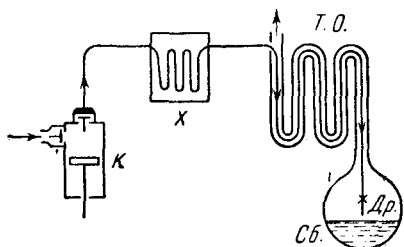


Рис. 283.

размеров теплообменника обе трубки свиваются в спираль). Стенки внутренней трубки делаются хорошо проводящими тепло. Наружная трубка покрывается тепловой изоляцией. Если по трубкам пустить встречные потоки газов, имеющих на входе разную

температуру, то в результате теплообмена через стенки внутренней трубки температура газов будет выравниваться: газ, имевший на входе в теплообменник более высокую температуру, по мере прохождения по теплообменнику охлаждается, встречный поток нагревается.

Сразу после запуска установки понижение температуры газа при расширении не достаточно для того, чтобы вызвать ожижение газа. Слегка охладившийся газ направляется по внешней трубке теплообменника, чем достигается некоторое охлаждение газа, текущего по внутренней трубке по направлению к дросселю. Поэтому каждая последующая порция газа, поступающая к дросселю, имеет более низкую температуру, чем предыдущая. Вместе с тем, чем ниже начальная температура газа, тем больше понижается его температура за счет эффекта Джоуля — Томсона. Следовательно, каждая последующая порция газа имеет до расширения более низкую температуру, чем предыдущая, и, кроме того, охлаждается при расширении сильнее. Таким образом, достигается все большее понижение температуры газа в сборнике *Сб* и, в конце концов, температура понижается настолько, что часть газа после расширения конденсируется в жидкость.

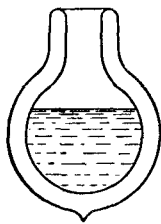


Рис. 284.

Второй промышленный метод ожижения газов (метод Клода) основан на охлаждении газа при совершении им работы. Сжатый газ направляется в поршневую машину (детандер), где он, расширяясь, совершает работу над поршнем за счет запаса внутренней энергии. В результате температура газа понижается. Этот метод был усовершенствован советским физиком П. Л. Капицей, который вместо поршневого детандера применил для охлаждения газа турбодетандер, т. е. турбину, приводимую во вращение предварительно сжатым газом.

Жидкие газы с низкой температурой кипения хранятся в сосудах специальной конструкции, называемых сосудами Дьюара. Они имеют двойные стенки (рис. 284), зазор между которыми тщательно эвакуируется. В условиях вакуума теплопроводность газа убывает с уменьшением давления (см. § 115). Поэтому эвакуированный зазор между стенками сосуда создает высокую тепловую изоляцию. Сосуды Дьюара делаются как из стекла, так и из металла и бывают емкостью от нескольких десятков миллилитров до нескольких тысяч литров.

Температура ожиженного газа определяется давлением, под которым он находится. В таблице 11 даны температуры кипения при атмосферном давлении. Понижая давление, при котором кипит ожиженный газ (это можно сделать непрерывно отсасывая образующиеся пары), можно снижать его температуру. Таким способом можно снизить температуру настолько, что жидкость перейдет в твердое состояние.

## ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

## § 124. Введение

Термодинамика первоначально возникла как наука о превращениях теплоты в работу. Однако законы, лежащие в основе термодинамики, имеют настолько общий характер, что в настоящее время термодинамические методы с большим успехом применяются для исследования многочисленных физических и химических процессов и для изучения свойств вещества и излучения. Как уже отмечалось в § 91, при изучении свойств и процессов превращения вещества термодинамика не вдается в рассмотрение микроскопической картины явлений. Она рассматривает явления, опираясь на извлеченные из опыта основные законы (начала). По этой причине выводы, к которым приходит термодинамика, имеют такую же степень достоверности, как и лежащие в ее основе законы. Последние же являются обобщением огромного количества опытных данных.

Основу термодинамики образуют ее первые два начала. Первое начало устанавливает количественные соотношения, имеющие место при превращениях энергии из одних видов в другие. Второе начало определяет условия, при которых возможны эти превращения, т. е. определяет возможные направления процессов.

Первое начало было сформулировано в § 95 [см. формулу (95.2)]. Формулировка второго начала будет дана в § 126.

В термодинамике большую роль играют понятия равновесного состояния и обратимого процесса. Понятие равновесного состояния было выяснено в § 93.

Обратимым процессом называется такой процесс, который может быть проведен в обратном направлении таким образом, что система будет проходить через те же состояния, что и при прямом ходе, но в обратной последовательности. Из сказанного в § 93 вытекает, что обратимым может быть только равновесный процесс.

Обратимый процесс, очевидно, обладает следующим свойством: если при прямом ходе на каком-то элементарном участке система получает тепло  $d'Q$  и совершает работу  $d'A$  (рис. 285), то при обратном ходе на том же участке система отдает тепло  $d'Q' = d'Q$  и над ней совершается ра-

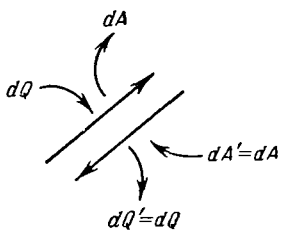


Рис. 285.

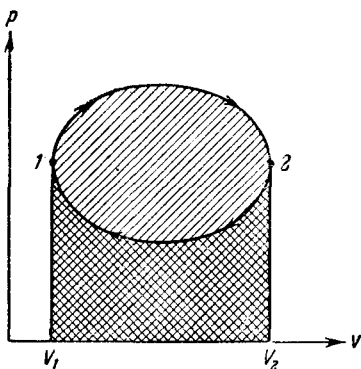


Рис. 286.

бота  $d'A' = d'A$ . По этой причине после протекания обратимого процесса в одном, а затем в обратном направлении и возвращения системы в первоначальное состояние в окружающих систему телах не должно оставаться никаких изменений.

Круговым процессом (или циклом) называется такой процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. На графике цикл изображается замкнутой кривой (рис. 286). Работа, совершаемая при круговом процессе, численно равна площади, охватываемой кривой. В самом деле, как было показано в § 96, работа на участке 1—2 положительна и численно равна площади, отмеченной наклоненной вправо штриховкой (рассматривается цикл, совершаемый по часовой стрелке). Работа на участке 2—1 отрицательна и численно равна площади, отмеченной наклоненной влево штриховкой. Следовательно,

работа за цикл численно равна площади, охватываемой кривой, и будет положительна при прямом цикле (т. е. таком, который совершается в направлении по часовой стрелке) и отрицательна при обратном.

После совершения цикла система возвращается в прежнее состояние. Поэтому всякая функция состояния, в частности внутренняя энергия, имеет в начале и в конце цикла одинаковое значение.

## § 125. Коэффициент полезного действия тепловой машины

Всякий двигатель представляет собой систему, совершающую многократно некий круговой процесс (цикл). Пусть в ходе цикла рабочее вещество (например, газ) сначала расширяется до объема  $V_2$ , а затем снова сжимается до первоначального объема  $V_1$  (рис. 287). Чтобы работа за цикл была больше нуля, давление (а следовательно, и температура) в процессе расширения должно быть больше, чем при сжатии. Для этого рабочему веществу нужно в ходе расширения сообщать тепло, а в ходе сжатия отнимать от него тепло.

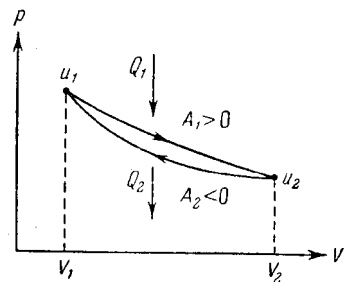


Рис. 287.

Напишем уравнение первого начала термодинамики для обеих частей цикла. При

расширении внутренняя энергия изменяется от значения  $U_1$  до  $U_2$ , причем система получает тепло  $Q_1$  и совершает работу  $A_1$ . Согласно первому началу

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1. \quad (125.1)$$

При сжатии система совершает работу  $A_2$  и отдает тепло  $Q'_2$ , что равнозначно получению тепла  $-Q'_2$ . Следовательно,

$$-Q'_2 = U_1 - U_2 + A_2. \quad (125.2)$$

Складывая уравнения (125.1) и (125.2), получаем:

$$Q_1 - Q'_2 = A_1 + A_2.$$



Замечая, что  $A_1 + A_2$  есть полная работа  $A$ , совершаемая системой за цикл, можно написать:

$$A = Q_1 - Q'_2. \quad (125.3)$$

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла, называется тепловой машиной.

Первое начало термодинамики иногда формулируется следующим образом: невозможен перпетуум мобиле (вечный двигатель) первого рода, т. е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

Как следует из (125.3), не все получаемое извне тепло  $Q_1$  используется для получения полезной работы. Для того чтобы двигатель работал циклами, часть тепла, равная  $Q'_2$ , должна быть возвращена во внешнюю среду и, следовательно, не используется по назначению (т. е. для совершения полезной работы). Очевидно, что чем полнее превращает тепловая машина получаемое извне тепло  $Q_1$  в полезную работу  $A$ , тем эта машина выгоднее. Поэтому тепловую машину принято характеризовать коэффициентом полезного действия  $\eta$  (сокращенно к. п. д.), который определяется как отношение совершаемой за цикл работы  $A$  к получаемому за цикл теплу  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (125.4)$$

Поскольку согласно (125.3)  $A = Q_1 - Q'_2$ , выражение для к. п. д. можно записать в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1}. \quad (125.5)$$

Из определения к. п. д. следует, что он не может быть больше единицы.

Если обратить цикл, изображенный на рис. 287, получится цикл холодильной машины. Такая машина отбирает за цикл от тела с температурой  $T_2$  количество тепла  $Q'_2$  и отдает телу с более высокой температурой  $T_1$  количество тепла  $Q_1$ . Над машиной за цикл должна быть совершена работа  $A$ . Эффективность холодильной

машины характеризуют ее холодильным коэффициентом, который определяют как отношение отнятого от охлаждаемого тела тепла  $Q'_2$  к работе  $A$ , которая затрачивается на приведение машины в действие:

$$\text{холодильный коэффициент} = \frac{Q'_2}{A} = \frac{Q'_2}{Q_1 - Q'_2}.$$

## § 126. Второе начало термодинамики

Второе начало термодинамики, как и первое, может быть сформулировано несколькими способами. В наиболее очевидной формулировке второе начало гласит, что невозможен самопроизвольный переход тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому. Более строго, *невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому.*

Не следует представлять дело так, что второе начало вообще запрещает переход тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому. В конце предыдущего параграфа мы рассмотрели процесс, приводящий к такому переходу. Однако этот переход не был единственным результатом процесса. Переход сопровождался изменениями в окружающих телах, связанными с совершением над системой работы  $A$ .

Второе начало может быть также сформулировано следующим образом: *невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества тепла и превращение этого тепла полностью в работу.*

На первый взгляд может показаться, что второй формулировке противоречит, например, процесс изотермического расширения идеального газа. Действительно, все полученное идеальным газом от какого-то тела тепло превращается полностью в работу. Однако получение тепла и превращение его в работу не единственный конечный результат процесса, кроме того, в результате процесса происходит изменение объема газа.

В тепловой машине превращение тепла в работу обязательно сопровождается дополнительным процессом — передачей некоторого количества тепла  $Q'_2$  (см.

предыдущий параграф) более холодному телу, вследствие чего получаемое от более нагретого тела количество тепла  $Q_1$  не может быть превращено полностью в работу.

Легко убедиться в том, что утверждение, содержащееся во второй формулировке, логически вытекает из утверждения, заключенного в первой формулировке. В самом деле, работа может быть полностью превращена в тепло, например, при посредстве трения. Поэтому, превратив с помощью процесса, запрещенного второй формулировкой, тепло, отнятое от какого-нибудь тела, полностью в работу, а затем превратив эту работу при посредстве трения в тепло, сообщаемое другому телу с более высокой температурой, мы осуществили бы процесс, невозможный согласно первой формулировке.

Используя процессы, запрещаемые вторым началом термодинамики, можно было бы создать двигатель, совершающий работу за счет тепла, получаемого от такого, например, практически неисчерпаемого источника энергии, как океан. Практически такой двигатель был бы равнозначен вечному двигателю. Поэтому второе начало иногда формулируется следующим образом: невозможен перпетуум мобиле второго рода, т. е. такой периодически действующий двигатель, который получал бы тепло от одного резервуара и превращал это тепло полностью в работу.

## § 127. Цикл Карно

Предположим, что какое-то тело может вступать в теплообмен с двумя тепловыми резервуарами, имеющими температуры  $T_1$  и  $T_2$  и обладающими бесконечно большой теплоемкостью. Это означает, что получение или отдача этими резервуарами конечного количества тепла не изменяет их температуры. Выясним, какой обратимый цикл может совершать тело в этих условиях.

Рассматриваемый цикл, очевидно, может состоять как из процессов, в ходе которых тело обменивается теплом с резервуарами, так и из процессов, не сопровождающихся теплообменом с внешней средой, т. е. адиабатических процессов.

Процесс, сопровождающийся обменом тепла с резервуарами, может быть обратимым только в том случае, если в ходе этого процесса температура тела будет равна температуре соответствующего резервуара. В самом деле, если, например, тело получает тепло от резервуара с температурой  $T_1$ , имея температуру, меньшую чем  $T_1$ , то при протекании того же процесса в обратном направлении тело сможет вернуть резервуару полученное от него тепло в том случае, если его температура во всяком случае не ниже, чем  $T_1$ . Следовательно, при прямом и обратном ходе процесса температура тела будет различна, тело проходит в обоих случаях через различные последовательности состояний (характеризующиеся неодинаковыми температурами) и рассматриваемый процесс будет необратимым.

Таким образом, процесс, сопровождающийся теплообменом, может быть обратимым только в том случае, если, получая тепло и возвращая его при обратном ходе резервуару, тело имеет одну и ту же температуру, равную температуре резервуара. Строго говоря, при получении тепла температура тела должна быть на бесконечно малую величину меньше температуры резервуара (иначе тепло не потечет от резервуара к телу), а при отдаче тепла температура тела должна быть на бесконечно малую величину выше температуры резервуара.

Следовательно, единственным обратимым процессом, сопровождающимся теплообменом с резервуаром, температура которого остается неизменной, является изотермический процесс, протекающий при температуре резервуара.

Итак, мы пришли к выводу, что обратимый цикл, совершаемый телом (или системой), вступающим в теплообмен с двумя тепловыми резервуарами бесконечно большой емкости, может состоять только из двух изотерм (при температурах резервуаров) и двух адиабат. Такой цикл был впервые введен в рассмотрение французским инженером Сади Карно и носит название цикла Карно. Отметим, что цикл Карно по определению обратимый.

Рассмотрим, как может быть осуществлен цикл Карно, например, с газом в качестве рабочего вещества. Поместим газ в цилиндр, закрытый плотно пригнанным поршнем. Стенки цилиндра и поршень сделаем из не-

проводящего тепло материала, дно цилиндра, напротив, изготовим из хорошо проводящего тепло вещества. Теплоемкость цилиндра и поршня будем считать пренебрежимо малой.

Пусть первоначально поршень занимает положение, отвечающее объему  $V_1$  и температуре газа  $T_1$ . Поставим

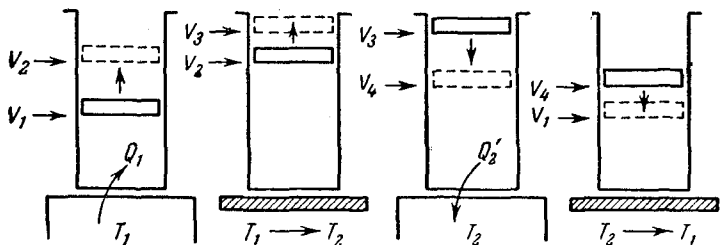


Рис. 288.

цилиндр на резервуар, имеющий температуру  $T_1$  и предоставим газу возможность очень медленно расширяться до объема  $V_2$ . При этом газ получит от резервуара тепло  $Q_1$  (рис. 288). Затем снимем цилиндр с резервуара, закроем дно теплоизолирующей крыш-

кой и позволим газу расширяться адиабатически до тех пор, пока его температура не упадет до значения  $T_2$ . Объем газа в результате станет равен  $V_3$ . Теперь, убрав теплоизолирующую крышку, поставим цилиндр на резервуар с температурой  $T_2$  и сожмем газ изотермически до такого объема  $V_4$ , чтобы при последующем ади-

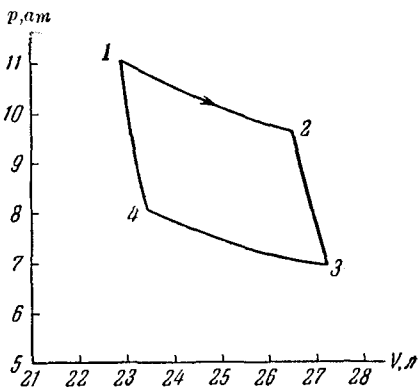


Рис. 289.

абатическом сжатии при достижении температуры  $T_1$  объем получил значение  $V_1$  (иначе цикл не замкнется). Наконец, снимем цилиндр с резервуара, закроем дно теплоизолирующей крышкой и, сжимая газ адиабатически,

приведем его в первоначальное состояние (с температурой  $T_1$  и объемом  $V_1$ ).

Если газ идеальный, соответствующий цикл на диаграмме ( $p, V$ ) выглядит так, как показано на рис. 289 (см. также рис. 293).

## § 128. Коэффициент полезного действия обратимых и необратимых машин

Основываясь на втором начале термодинамики, можно доказать, что к. п. д. всех обратимых машин, работающих с одним и тем же нагревателем и холодильником, имеет одинаковое значение.

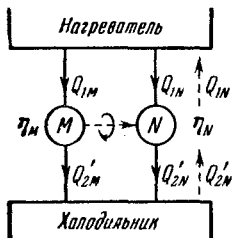


Рис. 290.

Доказательство будем вести от противного. Возьмем две произвольные обратимые тепловые машины  $M$  и  $N$  (рис. 290) и предположим, что к. п. д. одной из машин, например  $M$ , больше, чем другой. Как мы увидим, это предположение приведет нас к противоречию со вторым

началом термодинамики и, следовательно, должно быть отвергнуто.

Для простоты рассуждений допустим, что обе машины отбирают за цикл от нагревателя одинаковое количество тепла <sup>1)</sup>, которое мы обозначим для краткости  $Q_1$ :

$$Q_{1M} = Q_{1N} = Q_1.$$

По предположению  $\eta_M > \eta_N$ , т. е.

$$\frac{Q_1 - Q'_{2M}}{Q_1} > \frac{Q_1 - Q'_{2N}}{Q_1},$$

где  $Q'_{2M}$  и  $Q'_{2N}$  — количества тепла, отдаваемые за цикл холодильнику машинами  $M$  и  $N$ .

Очевидно, что при высказанном предположении машина  $M$  должна совершать за цикл больше работы, чем машина  $N$ , причем

$$A_M - A_N = (Q_1 - Q'_{2M}) - (Q_1 - Q'_{2N}) = Q'_{2N} - Q'_{2M}. \quad (128.1)$$

<sup>1)</sup> Это допущение не обязательно. Если  $Q_{1M} \neq Q_{1N}$ , нужно сопоставить  $m$  циклов машины  $M$  и  $n$  циклов машины  $N$ , взяв  $m$  и  $n$  такими, чтобы  $mQ_{1M} = nQ_{1N}$ .

Пусть машина  $N$  в обратную сторону, заставив ее работать в режиме холодильной машины. При этом, поскольку машина обратима, она будет отбирать от холодильника за цикл то же количество тепла  $Q'_{2N}$ , которое отдавала при прямом ходе, и отдавать нагревателю количество тепла  $Q_1$ . Кроме того, над машиной необходимо совершать за цикл работу  $A_N$ . Для совершения этой работы можно использовать машину  $M$ , сочленив машины таким образом, чтобы машина  $M$  приводила в действие машину  $N$ . Сочлененные так машины будут представлять собой некоторую обратимую тепловую машину.

Рассмотрим баланс составной машины за один цикл. От нагревателя машина  $M$  отберет тепло  $Q_1$ ; то же количество тепла возвратит ему машина  $N$ . Следовательно, в результате совершения цикла составная машина не получит и не отдаст тепло нагревателю. От холодильника за цикл будет отнято тепло  $Q = Q'_{2N} - Q'_{2M}$ .

Часть работы  $A_M$ , совершаемой машиной  $M$ , будет использована на приведение в действие машины  $N$ . Остаток же работы, равный  $A = A_M - A_N$ , может быть использован по нашему усмотрению. В соответствии с (128.1) эта работа равна теплу  $Q$ , получаемому сочлененной машиной от холодильника.

Следовательно, сочленив указанным образом обе машины, нам удалось бы осуществить такой процесс, единственным результатом которого было бы получение некоторого количества тепла  $Q$  от одного тела (холодильника) и превращение этого тепла полностью в работу, что, как утверждает второе начало термодинамики, невозможно. Таким образом, предположение о том, что  $\eta_M > \eta_N$ , должно быть отброшено.

Аналогично приводит к противоречию со вторым началом термодинамики предположение, что  $\eta_M < \eta_N$ . Для того чтобы в этом убедиться, нужно повторить изложенные выше рассуждения, заставив работать в обратном направлении машину  $M$ . Таким образом, к.п.д. обеих обратимых машин  $M$  и  $N$  должен быть одинаков. Поскольку мы не делали о машинах  $M$  и  $N$  никаких предположений, кроме того, что они обратимы, полученный результат справедлив для всех обратимых машин, независимо от их конструкции и свойств рабочего вещества.

Итак, мы пришли к выводу, что к. п. д. всех обратимых машин, работающих с одним и тем же нагревателем и холодильником, должен быть одинаков. Следовательно, к. п. д. обратной машины может зависеть только от температуры нагревателя и холодильника.

Теперь сопоставим к. п. д. обратной  $O$  и необратимой  $H$  машин (рис. 291). Предположим, что к. п. д. необратимой машины больше, чем обратной. Пусть обе машины отбирают от нагревателя за цикл одинаковое количество тепла  $Q_1 (Q_{1o} = Q_{1H} = Q_1)$ . Пустив обратимую машину в обратную сторону и заставив при этом необратимую машину приводить в действие обратимую, можно, проведя точно такие рассуждения, как и в случае двух обратимых машин, показать, что предположение  $\eta_H > \eta_o$  приводит к противоречию со вторым началом термодинамики.

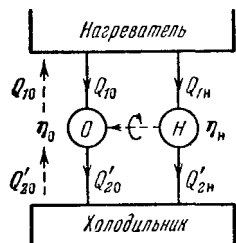


Рис. 291.

Доказать подобным же образом, что  $\eta$  необратимой машины не может быть меньше  $\eta$  обратной машины, не представляется возможным, ибо, проводя рассуждения, нам пришлось бы пустить в обратную сторону необратимую машину. Хотя это и возможно, но нет оснований считать, что работа, совершаемая при обратном ходе необратимой машиной, и количества тепла, которыми она обменивается с нагревателем и холодильником, будут отличаться от работы и количеств тепла при прямом ходе только знаком.

Таким образом, проведенные нами рассуждения приводят к необходимости отвергнуть предположение о том, что  $\eta_H > \eta_o$ , но не исключают возможности  $\eta_H < \eta_o$ . Вместе с тем ряд физических соображений указывает на то, что к. п. д. необратимой машины всегда меньше, чем обратной, работающей в тех же условиях. С некоторыми из этих соображений мы познакомимся.

Сопоставим обратимый и необратимый циклы расширения и сжатия газа. Для того чтобы цикл был обратимым, он должен совершаться очень медленно, вследствие чего давление газа будет успевать выравниваться по всему объему. Полная работа за цикл складывается из положительной работы при расширении  $A_+$  и отри-



цательной работы при сжатии  $A_-$ . Результирующая работа будет равна  $A = A_+ - A_-$  (предполагается, что при расширении газ получает, а при сжатии отдает тепло).

Если провести цикл необратимо, т. е. достаточно быстро, то давление не успевает выравниваться и при расширении давление газа под поршнем будет меньше, чем то, которое было при аналогичном положении поршня во время обратимого цикла, а при сжатии, наоборот, несколько больше (рис. 292). В результате положительное слагаемое  $A'_+$  будет меньше  $A_+$ , а отрицательное  $A'_-$  больше  $A_-$ , так что полная работа  $A' = A'_+ - A'_-$  будет

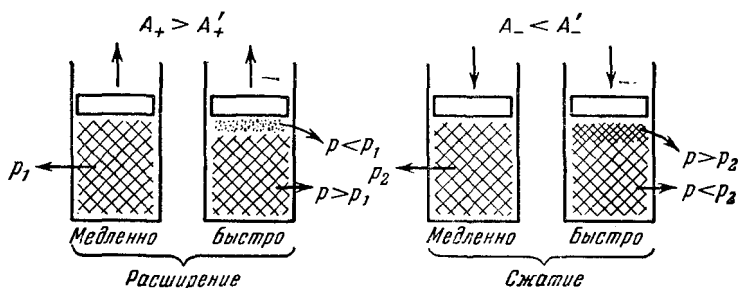


Рис. 292.

меньше, чем при обратимом цикле. Соответственно и к. п. д. необратимого цикла будет меньше, чем обратимого.

Трение всегда связано с превращением работы в тепло, т. е. является типичным необратимым процессом. Поэтому у обратимой машины трения не должно быть. Пусть какая-то обратимая машина получает за цикл тепло  $Q_1$  и совершает работу  $A$ . Нарушим обратимость машины, допустив трение, например, между цилиндром и поршнем. Из-за трения часть работы  $A$  превратится в тепло, которое либо перейдет к холодильнику, либо рассеется в окружающую среду. В результате, получая от нагревателя то же количество тепла  $Q_1$ , что и прежде, машина будет совершать работу, меньшую  $A$ , а следовательно, и к. п. д. после появления необратимости станет меньше.

Итак, мы доказали следующие утверждения:

1) к. п. д. всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (т. е. при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков;

2) к. п. д. необратимой машины всегда меньше, чем обратимой, работающей в тех же условиях.

### § 129. К. п. д. цикла Карно для идеального газа

В предыдущем параграфе было выяснено, что к. п. д. обратимой машины не зависит от ее устройства и свойств рабочего вещества и определяется только температурой нагревателя и холодильника.

Однако вид зависимости к. п. д. от температуры нагревателя  $T_1$  и температуры холодильника  $T_2$  остался невыясненным.

Чтобы найти эту зависимость, естественно рассмотреть машину с рабочим веществом, свойства которого отличаются наибольшей простотой. Такими свойствами обладает идеальный газ. При достаточно большой теплоемкости

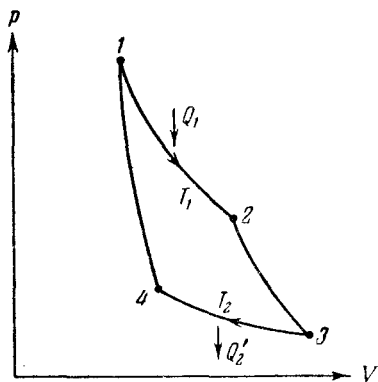


Рис. 293.

нагревателя и холодильника единственным обратимым циклом будет, как мы знаем (см. § 127), цикл Карно.

Итак, рассмотрим цикл Карно для идеального газа. Если нам удастся найти к. п. д. такого цикла как функцию температур  $T_1$  и  $T_2$ , то тем самым мы найдем выражение для к. п. д. всех обратимых машин.

К. п. д. тепловой машины по определению равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}, \quad (129.1)$$

где  $Q_1$  — тепло, получаемое за цикл от нагревателя  $Q_2'$  — тепло, отдаваемое за цикл холодильнику.

При изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа остается постоянной. Поэтому коли-

чество полученного газом тепла  $Q_1$  равно работе  $A_{12}$ , совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 293). Эта работа согласно (105.9) равна

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (129.2)$$

где  $m$  — масса идеального газа в машине.

Количество отдаваемого холодильнику тепла  $Q'_2$  равно работе  $A'_{34}$ , затрачиваемой на сжатие газа при переводе его из состояния 3 в состояние 4. Эта работа равна

$$Q'_2 = A'_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (129.3)$$

Для того чтобы цикл был замкнутым, нужно, чтобы состояния 4 и 1 лежали на одной и той же адиабате. Отсюда вытекает условие

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (129.4)$$

[см. уравнение адиабаты (103.3)].

Аналогично, поскольку состояния 2 и 3 лежат на одной и той же адиабате, выполняется условие

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (129.5)$$

Деля (129.5) на (129.4), приходим к условию замкнутости цикла:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (129.6)$$

Теперь подставим (129.2) и (129.3) в выражение (129.1) для к. п. д.

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Наконец, учитывая (129.6), получаем:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (129.7)$$

Таким образом, к. п. д. цикла Карно для идеального газа действительно оказывается зависящим только от температуры нагревателя и холодильника.

Как уже отмечалось, выражение (129.7) дает значение к. п. д. любой обратимой машины.

## § 130. Термодинамическая шкала температур

Доказанная в § 128 теорема о независимости к. п. д. обратимых машин от свойств рабочего вещества позволяет установить температурную шкалу, не зависящую от выбора термометрического тела. В соответствии с указанной теоремой величина

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q'_2}{Q_1},$$

а следовательно, и отношение  $Q'_2/Q_1$  для цикла Карно, зависит только от температур нагревателя и холодильника. Обозначив величины этих температур по некоторой, пока не известной нам шкале через  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , можно написать, что

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad (130.1)$$

где  $f(\vartheta_1, \vartheta_2)$  — универсальная (т. е. одинаковая для всех циклов Карно) функция температур нагревателя и холодильника.

Соотношение (130.1) дает возможность определять температуру тел через количества тепла, получаемые и отдаваемые при циклах Карно.

Докажем, что функция (130.1) обладает следующим свойством:

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)}, \quad (130.2)$$

где  $\theta(\vartheta)$  есть опять-таки универсальная функция температуры.

Рассмотрим две обратимые машины (рис. 294), холодильник одной из которых служит одновременно нагревателем для другой. Предположим, что вторая машина отбирает от резервуара с температурой  $\vartheta_2$  такое же количество тепла, какое отдает ему первая машина, т. е. что  $Q_2 = Q'_2$ . В соответствии с (130.1) для каждой из

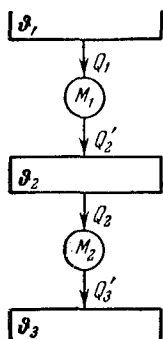


Рис. 294.

машин можно написать:

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad (130.3)$$

$$\frac{Q'_3}{Q_2} = f(\vartheta_2, \vartheta_3). \quad (130.4)$$

Рассматривая обе машины и резервуар с температурой  $\vartheta_2$  как единую обратимую машину<sup>1)</sup>, получающую тепло  $Q_1$  от нагревателя с температурой  $\vartheta_1$  и отдающую тепло  $Q'_3$  холодильнику с температурой  $\vartheta_3$ , можно написать, что

$$\frac{Q'_3}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_3). \quad (130.5)$$

Разделив (130.5) на (130.3), получим:

$$\frac{Q'_3}{Q_2} = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_1, \vartheta_2)}.$$

Наконец, сравнивая полученное выражение с (130.4) и учитывая, что  $Q'_2 = Q_2$ , приходим к следующему соотношению:

$$f(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_1, \vartheta_2)}, \quad (130.6)$$

Это соотношение связывает температуры  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_3$  двух тел, причем в нем фигурирует температура  $\vartheta_1$  третьего тела. Условившись раз навсегда о выборе этого тела, т. е. сделав  $\vartheta_1$  неизменной, мы сведем функцию  $f(\vartheta_1, \vartheta)$ , стоящую в числителе и знаменателе формулы (130.6), к функции одной переменной  $\vartheta$ . Обозначая эту функцию через  $\theta(\vartheta)$ , можно написать формулу (130.6) в виде

$$f(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{\theta(\vartheta_3)}{\theta(\vartheta_2)},$$

или, меняя индексы,

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)}, \quad (130.7)$$

что совпадает с (130.2).

---

<sup>1)</sup> Это допустимо, поскольку  $Q'_2 = Q_2$ .

Функция  $\theta(\theta)$  зависит только от температуры. Поэтому ее значения можно использовать для характеристики температуры соответствующего тела, т. е. полагать температуру тела равной  $\theta$ , где  $\theta = \theta(\theta)$ . Тогда выражение (130.1) примет следующий вид:

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}. \quad (130.8)$$

Соотношение (130.8) положено в основу так называемой термодинамической шкалы температур. Преимущество этой шкалы заключается в том, что она не зависит от выбора тела (рабочего вещества в цикле Карно), используемого для измерения температуры.

В соответствии с (130.8) для сопоставления температур двух тел нужно осуществить цикл Карно, используя эти тела в качестве нагревателя и холодильника. Отношение количества тепла, отданного телу — «холодильнику», к количеству тепла, отобранного от тела — «нагревателя», даст отношение температур рассматриваемых тел.

Для однозначного определения численного значения  $\theta$  необходимо условиться о выборе единицы температуры, т. е. градуса. За абсолютный градус принимается одна сотая разности температур кипящей при атмосферном давлении воды и тающего льда. Таким образом, градус абсолютной термодинамической шкалы равен градусу идеальной газовой шкалы.

Легко видеть, что термодинамическая шкала температур совпадает с идеальной газовой шкалой. Действительно, в соответствии с (129.7)

$$\frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда следует, что

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (130.9)$$

Сопоставляя (130.8) и (130.9), получим:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Следовательно,  $\theta$  пропорциональна  $T$  и, поскольку градус обеих шкал одинаков, то  $\theta = T$ .

## § 131. Приведенное количество тепла. Неравенство Клаузиуса

Всякая тепловая машина представляет собой некую систему тел, многократно повторяющую один и тот же цикл. В § 128 мы показали, что к. п. д. всех обратимых машин одинаков, а к. п. д. необратимой машины всегда меньше, чем обратимой. Это утверждение можно записать аналитически следующим образом:

$$\frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (131.1)$$

Слева стоит общее определение к. п. д., пригодное для всякой машины, справа — найденное в § 129 выражение к. п. д. обратимой машины. Знак равенства соответствует обратимой, а знак неравенства — необратимой машине.

Соотношение (131.1), очевидно, справедливо также для любой системы тел, совершающей обратимый (знак равенства) или необратимый (знак неравенства) цикл, независимо от того, сколько раз этот цикл повторяется, а следовательно, независимо от того, используется данная система как тепловая машина или нет. В дальнейшем при рассмотрении соотношений вида (131.1) мы будем иметь в виду цикл, совершаемый некоторой системой тел.

Из выражения (131.1) вытекает следующее соотношение:

$$\frac{Q'_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}.$$

Умножив его на положительную величину  $\frac{Q_1}{T_2}$ , получаем:

$$\frac{Q'_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}.$$

Наконец, вычитая из левой и правой частей  $\frac{Q'_2}{T_2}$ , приходим к выражению

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q'_2}{T_2} \leq 0. \quad (131.2)$$

В соотношении (131.2) входит как тепло, получаемое системой ( $Q_1$ ), так и тепло, отдаваемое ею ( $Q_2'$ ). Для целей обобщения, которым мы займемся в дальнейшем, удобно видоизменить (131.2) так, чтобы оно содержало только количества теплоты  $Q_i$ , получаемые системой от других тел, причем эти теплоты мы будем рассматривать как алгебраические величины: если получаемое  $Q$  положительно, тепло передается от какого-то внешнего тела системе; если  $Q$  отрицательно, тепло отдается системой внешнему телу. Итак, вместо отдаваемого телу с температурой  $T_2$  тепла  $Q_2'$  мы введем получаемое от этого тела тепло  $Q_2$ , которое равно  $-Q_2'$ . Тогда выражение (131.2) примет окончательно следующий вид:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (131.3)$$

Это соотношение носит название неравенства Клаузиуса.

Отношение количества тепла, полученного системой от какого-либо тела, к температуре этого тела Клаузиус назвал приведенным количеством тепла. Используя терминологию Клаузиуса, (131.3) можно прочесть следующим образом: если какая-то система совершает цикл, в ходе которого вступает в теплообмен

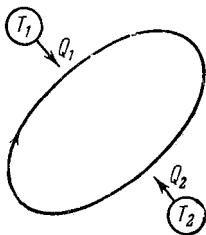


Рис. 295.

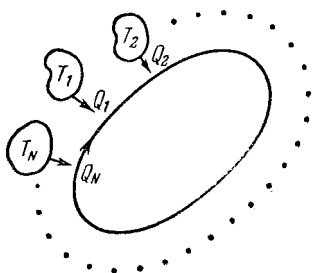


Рис. 296.

с двумя тепловыми резервуарами, температуры которых постоянны (рис. 295), то сумма приведенных количеств тепла равна нулю, если цикл обратим, и меньше нуля, если цикл необратим.

Если система в ходе цикла вступает в теплообмен не с двумя, а с  $N$  телами (рис. 296), причем от тела с



температурой  $T_i$  получает количество тепла  $Q_i$  (которое может быть как положительным, так и отрицательным), естественно предположить по аналогии с (131.3), что должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (131.4)$$

Чтобы не повторяться, условимся о том, что в дальнейшем во всех случаях, когда в каком-либо выражении будет стоять знак « $\leq$ » или « $\geq$ », то знак равенства будет относиться к обратимым процессам, а знак неравенства — к необратимым процессам. То же самое справедливо и для выражения (131.4).

До сих пор мы полагали, что теплоемкость тел, обменивающихся теплом с рассматриваемой системой, настолько велика, что процесс теплообмена не отражается на температуре  $T_i$  этих тел. Если это условие не выполняется, то при передаче системе тепла  $Q_i$  температура соответствующего тела  $T_i$  будет непрерывно меняться. Чтобы написать для этого случая выражение, аналогичное (131.4), нужно каждый из процессов передачи  $Q_i$  разбить на ряд элементарных процессов, настолько малых, чтобы передачу в ходе каждого из них элементарного количества тепла  $\Delta'Q_i$  можно было считать происходящей при постоянной (но своей для каждого  $\Delta'Q_i$ ) температуре  $T_i$ . Тогда вместо (131.4) мы должны написать:

$$\sum_{\bigcirc} \frac{\Delta'Q_i}{T_i} \leq 0, \quad (131.5)$$

где индекс  $i$  означает уже не номер тела, с которым система вступает в теплообмен, а номер одного из элементарных процессов, на которые мы разбили цикл, совершаемый системой,  $\Delta'Q_i$  означает количество тепла, получаемое системой в ходе  $i$ -го элементарного процесса от одного из внешних тел,  $T_i$  — температура этого внешнего тела в момент передачи им системе тепла  $\Delta'Q_i$ . Значок  $\bigcirc$  под знаком  $\sum$  указывает на то, что сумма должна быть взята по всему циклу.

Выражение (131.5) означает, что сумма элементарных приведенных количеств тепла, получаемых системой

в ходе цикла извне, равна нулю, если цикл обратим, и меньше нуля, если цикл необратим.

Строго говоря, (131.5) должно быть записано следующим образом:

$$\oint \frac{d'Q}{T} \leq 0, \quad (131.6)$$

где интеграл берется по всему циклу <sup>1)</sup>.

## § 132. Энтропия

Сумму приведенных количеств тепла можно образовывать не только для цикла, но и для любого некругового процесса, причем для обратимых переходов из одного состояния в другое эта сумма обладает, как мы сейчас выясним, замечательным свойством.

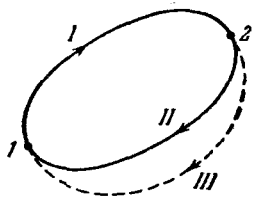


Рис. 297.

Возьмем какой-либо обратимый цикл и выделим на нем два произвольных состояния 1 и 2 (рис. 297). Эти состояния делят цикл на две ветви, которые обозначены на рисунке цифрами I и II.

Как мы показали в предыдущем параграфе, сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу (цикл обратим!), равна нулю:

$$\sum_{\bigcirc} \frac{\Delta'Q}{T} = 0. \quad (132.1)$$

Все слагаемые, входящие в сумму (132.1) можно разбить на две группы, отнеся в одну группу слагаемые, соответствующие ветви I, а в другую — соответствующие ветви II. Тогда выражение (132.1) может быть записано следующим образом:

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (I)}} \frac{\Delta'Q}{T} + \sum_{\substack{2 \rightarrow 1 \\ (II)}} \frac{\Delta'Q}{T} = 0. \quad (132.2)$$

<sup>1)</sup> Рассуждения, приведшие нас от (131.3) к (131.6), отнюдь не могут рассматриваться как строгое доказательство. Однако выражение (131.6) может быть получено из (131.3) вполне строго.

Первая сумма соответствует переходу из состояния  $1$  в состояние  $2$  по ветви  $I$ , вторая сумма соответствует переходу из состояния  $2$  в состояние  $1$  по ветви  $II$ .

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (\text{обр})}} \frac{\Delta'Q}{T}, \quad (132.3)$$

соответствующую какому-то обратимому переходу из состояния  $1$  в состояние  $2$  (рис. 298). Если изменить направление перехода, то в силу обратимости процесса сумма (132.3) должна изменить знак. В самом деле, если, например, на отмеченном на рис. 298 элементарном участке при направлении процесса  $1 \rightarrow 2$  система получает от какого-то тела с температурой  $T$  количество тепла  $\Delta'Q$ , то при направлении процесса  $2 \rightarrow 1$  на том же участке система должна отдавать тому же телу с температурой  $T$  такое же количество тепла  $\Delta'Q$ , т. е. получать тепло  $-\Delta'Q$ . Таким образом, при изменении направления перехода все слагаемые в (132.3) меняют знак на обратный, вследствие чего

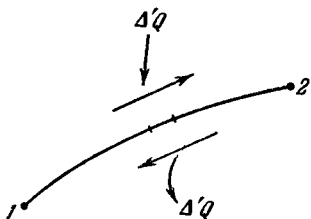


Рис. 298.

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (\text{обр})}} \frac{\Delta'Q}{T} = - \sum_{\substack{2 \rightarrow 1 \\ (\text{обр})}} \frac{\Delta'Q}{T}. \quad (132.4)$$

Основываясь на свойстве (132.4), перепишем (132.2) следующим образом:

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (I)}} \frac{\Delta'Q}{T} - \sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (II)}} \frac{\Delta'Q}{T} = 0,$$

откуда следует, что

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (I)}} \frac{\Delta'Q}{T} = \sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (II)}} \frac{\Delta'Q}{T}. \quad (132.5)$$

Поскольку исходный обратимый цикл был взят нами совершенно произвольно, соотношение (132.5) должно

выполняться для любого обратимого цикла, включающего состояния  $1$  и  $2$ . В частности, вместо цикла, образованного ветвями  $I$  и  $II$ , можно рассмотреть цикл, состоящий из ветви  $I$  и показанной на рис. 297 пунктиром обратной ветви  $III$ , и, проведя те же рассуждения, убедиться, что сумма (132.3) для ветви  $III$  имеет такое же значение, как и для ветви  $I$ .

Таким образом, мы пришли к весьма важному выводу: сумма приведенных количеств тепла, полученных системой при обратимом переходе из одного (начального) состояния в другое (конечное), не зависит от пути, по которому совершается переход, и, следовательно, зависит только от начального и конечного состояний.

Подобным же свойством обладает, как мы знаем, сумма приращений внутренней энергии. Вследствие того, что энергия есть функция состояния, сумма приращений внутренней энергии при любом переходе из состояния  $1$  в состояние  $2$  должна быть равна разности значений энергии в этих состояниях:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta U = U_2 - U_1. \quad (132.6)$$

Очевидно, что сказанное выше справедливо для любой функции состояния, т. е. величины, однозначно определяемой состоянием системы:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta f(\text{сост}) = f(2) - f(1). \quad (132.7)$$

Если величина не является функцией состояния, сумма ее элементарных количеств оказывается зависящей от пути, по которому система переходит из одного состояния в другое. К числу таких величин принадлежит, например, работа. Как мы знаем, работа

$$A = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta' A$$

численно равна площади, охватываемой кривой, изображающей процесс (см. рис. 215), и, очевидно, зависит от пути, по которому осуществляется переход.

То же имеет место и для количества тепла, получаемого системой. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta' Q = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta U + \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta' A. \quad (132.8)$$

Первая из сумм, стоящих в правой части (132.8), не зависит от пути, вторая — зависит. Следовательно,  $\sum \Delta'Q$  зависит от пути, по которому осуществляется переход. Независимость суммы

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (\text{обр})}} \frac{\Delta'Q}{T}$$

от пути, по которому совершается обратимый переход из состояния 1 в состояние 2, дает основание утверждать, что при обратимом процессе  $\Delta'Q/T$  представляет собой приращение некоторой функции состояния. Эта функция была названа энтропией. Обозначают ее обычно буквой  $S$ . Таким образом,

$$\left( \frac{\Delta'Q}{T} \right)_{\text{обр}} = \Delta S. \quad (132.9)$$

Согласно (132.9) приращение энтропии равно элементарному количеству тепла, получаемому обратимо системой извне, отнесенному к температуре, при которой это тепло получается<sup>1)</sup>.

Поскольку энтропия — функция состояния, сумма приращений энтропии должна быть равна разности значений энтропии в конечном и начальном состояниях [ср. с (132.6)]:

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (\text{обр})}} \frac{\Delta'Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S = S_2 - S_1. \quad (132.10)$$

Более строго, суммы (132.10) должны быть заменены интегралами:

$$\int_{\substack{1 \\ (\text{обр})}}^2 \frac{d'Q}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1. \quad (132.11)$$

Энтропия — аддитивная величина. Это означает, что энтропия системы равна сумме энтропий отдельных ее частей.

<sup>1)</sup> Напомним, что при обратимом процессе температуры обменивающихся теплом тел одинаковы.

## § 133. Свойства энтропии

При обратимом процессе сумма приведенных количеств тепла (132.10) равна приращению энтропии. Выясним, в каком соотношении находятся сумма приведенных количеств тепла и приращение энтропии при необратимом процессе. Для этого рассмотрим цикл, состоящий из необратимой и обратимой ветвей (рис. 299). Поскольку цикл в целом необратим, сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу, должна быть меньше нуля:

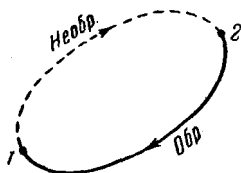


Рис. 299.

$$\sum_{\bigcirc} \frac{\Delta'Q}{T} < 0.$$

Разобьем эту сумму на две части, отнесенные к разным ветвям:

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ \text{(необр)}}} \frac{\Delta'Q}{T} + \sum_{\substack{2 \rightarrow 1 \\ \text{(обр)}}} \frac{\Delta'Q}{T} < 0. \quad (133.1)$$

Вторая из этих сумм в соответствии с (132.10) равна разности значений энтропии в состояниях 1 и 2. Поэтому соотношение (133.1) можно записать следующим образом:

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ \text{(необр)}}} \frac{\Delta'Q}{T} + (S_1 - S_2) < 0,$$

откуда следует, что

$$S_2 - S_1 > \sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ \text{(необр)}}} \frac{\Delta'Q}{T}. \quad (133.2)$$

Объединяя вместе выражения (132.10) и (133.2), получаем:

$$S_2 - S_1 \geq \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}, \quad (133.3)$$

где знак равенства соответствует любому обратимому переходу из состояния 1 в состояние 2, а знак неравенства — любому необратимому переходу  $1 \rightarrow 2$ . Температура  $T$  в (133.3) означает температуру того тела, от которого система получает тепло  $\Delta'Q$ . При обратимом

процессе эта температура совпадает с температурой системы.

Соотношение (133.3), очевидно, должно выполняться для каждого элементарного процесса:

$$\Delta S \geq \frac{\Delta'Q}{T} \quad (133.4)$$

или

$$dS \geq \frac{d'Q}{T}. \quad (133.5)$$

Отметим, что, поскольку энтропия — функция состояния, выражение

$$S_2 - S_1 = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S,$$

так же как (132.6) и (132.7), справедливо всегда, независимо от того, обратим соответствующий переход или необратим. Формула же

$$S_2 - S_1 = \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}$$

справедлива только в том случае, если переход обратим.

Если система изолирована, т. е. не обменивается теплом с внешней средой, то все  $\Delta'Q$  в (133.3) будут равны нулю, вследствие чего

$$S_2 - S_1 \geq 0 \quad (133.6)$$

или соответственно

$$\Delta S \geq 0. \quad (133.7)$$

Таким образом, энтропия изолированной системы может только возрастать (если в системе протекает необратимый процесс), либо оставаться постоянной (если в системе протекает обратимый процесс). Убывать энтропия изолированной системы не может.

Процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, называется, как мы знаем, адиабатическим. Следовательно, для обратимого адиабатического процесса характерно то, что он протекает при постоянной энтропии, поэтому обратимая адиабата может быть названа и *энтропой*. Пользуясь новой терминологией, можно сказать, что цикл Карно состоит из двух изотерм и двух изэнтроп. На диаграмме  $(T, S)$  цикл Карно, очевидно,

будет иметь вид прямоугольника (рис. 300). Площадь прямоугольника численно равна количеству тепла, получаемому системой за цикл. В самом деле, согласно (133.4) элементарное количество тепла, получаемого системой при обратимом процессе, равно

$$\Delta'Q = T \Delta S. \quad (133.8)$$

Следовательно, количество тепла, получаемое системой при обратимом изотермическом процессе, может быть представлено следующим образом:

$$Q = T(S_2 - S_1), \quad (133.9)$$

где  $S_1$  — энтропия в начале, а  $S_2$  — в конце процесса.

Используя (133.9), количества тепла, получаемые системой в ходе изотермических процессов, образующих цикл, можно записать в виде

$$Q_{12} = T_1(S_1 - S_2), \quad Q_{34} = T_2(S_2 - S_1).$$

Полное же количество тепла, получаемое за цикл, равно

$$Q = Q_{12} + Q_{34} = T_1(S_1 - S_2) + T_2(S_2 - S_1) = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2).$$

Последнее выражение, как легко видеть, равно площади цикла.

Соотношение (133.7), означающее, что энтропия не может убывать, относится только к изолированным системам. Если система обменивается теплом с внешней средой, ее энтропия может вести себя любым образом. В частности, если система отдает тепло внешним телам (получаемое системой  $\Delta'Q$  отрицательно), энтропия системы уменьшается.

Если неизолированная система совершает цикл, то ее энтропия, будучи функцией состояния, принимает в конце цикла первоначальное значение. Однако в ходе цикла энтропия, вообще говоря, меняется, причем должно иметь место как возрастание энтропии на одних участках цикла, так и убывание ее на других участках, поскольку суммарное изменение энтропии за цикл должно равняться нулю.

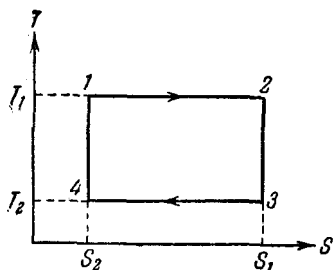


Рис. 300.



Найдем изменение энтропии при обратимом изотермическом процессе. В соответствии с (133.3) приращение энтропии равно

$$S_2 - S_1 = \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}.$$

Вынося постоянную температуру за знак суммы, получим:

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta'Q = \frac{Q_{12}}{T}, \quad (133.10)$$

где  $Q_{12}$  — количество тепла, полученное системой при обратимом изотермическом переходе из состояния 1 в состояние 2. Если это количество тепла отрицательно,  $S_2 < S_1$ .

Для того чтобы найти изменение энтропии при необратимом процессе, нужно рассмотреть какой-либо обратимый процесс, приводящий систему в то же конечное состояние, и вычислить для этого процесса сумму приведенных количеств тепла. Поясним это следующим примером. Имеется изолированная система, состоящая из двух тел, обладающих различными температурами  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Между телами происходит теплообмен, приводящий к выравниванию их температур. Этот процесс, очевидно, необратим и должен сопровождаться возрастанием энтропии системы.

Предположим для простоты, что теплоемкость обоих тел одинакова и равна  $C$ . Тогда конечная равновесная температура обоих тел будет равна

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (133.11)$$

Чтобы вычислить изменение энтропии системы, рассмотрим обратимый процесс, приводящий систему в состояние с одинаковой для обоих тел температурой  $T_0$ . Этот процесс заключается в обратимой передаче первым телом системы какому-то внешнему телу такого количества тепла, что температура первого тела понижается до значения  $T_0$ , и в обратимом получении вторым телом извне такого количества тепла, что его температура повышается до значения  $T_0$ . Для того чтобы быть обратимыми, оба эти процесса должны протекать так, чтобы

температуры каждого из тел системы и соответствующего внешнего тела были в каждый момент времени одинаковы.

Процесс охлаждения первого тела сопровождается приращением его энтропии:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{C dT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

Процесс нагревания второго тела сопровождается приращением его энтропии:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_0} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_2}^{T_0} \frac{C dT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_2}.$$

Отметим, что, поскольку  $T_1 > T_0 > T_2$ ,  $\Delta S_1$  отрицательно, а  $\Delta S_2$  положительно.

Изменение энтропии системы складывается из изменений энтропии отдельных тел:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_0}{T_1} + C \ln \frac{T_0}{T_2} = C \ln \frac{T_0^2}{T_1 T_2}. \quad (133.12)$$

Подставив в (133.12) значение (133.11) для  $T_0$ , получим окончательное выражение для приращения энтропии системы:

$$\Delta S = C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}.$$

Покажем, что это выражение действительно больше нуля. Для этого преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма, следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} &= \frac{T_1^2 + 2T_1 T_2 + T_2^2}{4T_1 T_2} = \frac{T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2 + 4T_1 T_2}{4T_1 T_2} = \\ &= 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1. \end{aligned}$$

Поскольку это выражение больше единицы, логарифм его положителен и, следовательно,  $\Delta S > 0$ .

Вычислим работу, совершаемую системой тел при обратимом изотермическом процессе. Согласно уравнению (95.4)

$$d'A = d'Q - dU.$$

Как следует из формулы (133.5), при обратимом процессе  $d'Q = TdS$ . Подставив это значение в выражение для  $d'A$ , получим:

$$d'A = T dS - dU.$$

Так как  $dT = 0$  (процесс изотермический), величину  $TdS$  можно заменить через  $d(TS)$ . Тогда выражение для работы примет вид:

$$d'A = d(TS) - dU = -d(U - TS). \quad (133.13)$$

Таким образом, при обратимом изотермическом процессе работа, совершаемая системой над внешними телами, оказывается равной убыли величины

$$F = U - TS, \quad (133.14)$$

которая, как легко видеть, является функцией состояния. Эта величина получила название свободной энергии. Она представляет собой ту часть внутренней энергии системы, которая превращается во внешнюю работу при обратимых изотермических процессах. Величину  $TS$ , равную разности между внутренней и свободной энергиями, называют иногда связанной энергией.

Интегрируя соотношение (133.13), получим:

$$(A_{12})_{\text{изотермич}} = F_1 - F_2. \quad (133.15)$$

Заметим, что в случае адиабатического процесса ( $Q = 0$ ) совершаемая системой работа равна убыли внутренней энергии системы:

$$(A_{12})_{\text{адиабатич}} = U_1 - U_2. \quad (133.16)$$

При изотермических процессах роль внутренней энергии переходит к свободной энергии.

Соотношение (133.16) справедливо как при обратимых, так и при необратимых процессах. Соотношение же (133.15) справедливо только при обратимых процессах. При необратимых процессах  $d'Q < TdS$  [см. (133.5)]. Подставив это неравенство в уравнение  $d'A = d'Q - dU$ , легко получить, что при необратимых изотермических процессах

$$(A_{12})_{\text{изотермич}} < F_1 - F_2.$$

Следовательно, убыль свободной энергии определяет наибольшую величину работы, которую может совершить система при изотермическом процессе.

## § 134. Теорема Нернста

Выражение (132.11) определяет не саму энтропию, а разность ее значений в двух состояниях. Нернст доказал теорему, которая дает возможность определить само значение энтропии в любом состоянии.

Теорема Нернста (называемая иногда третьим началом термодинамики) гласит, что *при стремлении абсолютной температуры к нулю энтропия любого тела также стремится к нулю*:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (134.1)$$

Согласно теореме Нернста энтропия любого тела при абсолютном нуле равна нулю. На этом основании энтропия в состоянии с температурой  $T$  может быть представлена следующим образом:

$$S = \int_0^T \frac{d'Q}{T}. \quad (134.2)$$

Если известна, например, теплоемкость тела при постоянном давлении как функция температуры, то энтропия может быть вычислена по формуле

$$S = \int_0^T \frac{C_p(T) dT}{T}. \quad (134.3)$$

## § 135. Энтропия и вероятность

Как было установлено Больцманом, энтропия имеет простое статистическое толкование. В предыдущем параграфе было показано, что энтропия изолированной, т. е. предоставленной самой себе, системы не может убывать. С другой стороны, очевидно, что предоставленная самой себе система будет переходить из менее вероятных состояний в более вероятные. Попав в наиболее вероятное состояние, система будет пребывать в нем неограниченно долго. Если одинаковой и притом наибольшей вероятностью обладает не одно, а ряд состояний, то изолированная система сможет переходить из одного из таких состояний в другие. Таким образом,

энтропия и вероятность состояний изолированной системы ведут себя сходным образом: они могут либо возра-стать, либо оставаться неизменными.

Из приведенных рассуждений вытекает, что между энтропией и вероятностью состояния системы должна существовать определенная связь. Больцман показал, что эта связь имеет следующий вид:

$$S = k \ln W, \quad (135.1)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $W$  — так называемая термодинамическая вероятность состояния системы, под которой понимается число различных способов, которыми может быть осуществлено данное состояние<sup>1)</sup>.

Чтобы понять смысл величины  $W$ , рассмотрим следующий пример. Пусть в сосуде имеется только четыре молекулы. Разобъем мысленно сосуд на две равные части — левую и правую (рис. 301). Вследствие движения молекул распределение их между обеими частями сосуда будет меняться. Рассмотрим состояния, отличающиеся друг от друга числом молекул в левой и правой частях сосуда. Пронумеруем молекулы и подсчитаем число способов, которыми может быть реализовано каждое состояние. Результаты подсчета приведены в таблице 12. Из 16 возможных распределений молекул между половинами сосуда шесть соответствуют одинаковому количеству молекул справа и слева, восемь — состояниям, при которых в одной из половин сосуда находится одна молекула, а в другой — три, и только двумя способами могут быть получены состояния, при которых все молекулы собираются в одной из половин сосуда.

Каждая молекула с равной вероятностью может находиться как в левой, так и в правой половине сосуда.

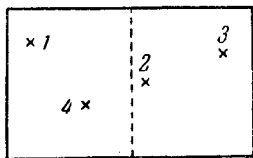


Рис. 301.

<sup>1)</sup> Термодинамическая вероятность отличается от математической вероятности, обычно называемой просто вероятностью. Математическая вероятность некоторого события равна отношению числа случаев, благоприятствующих данному событию, к общему числу равновероятных случаев. Следовательно, она выражается дробным числом и не превышает единицы. Термодинамическая вероятность, напротив, выражается целым, как правило, очень большим числом.

Состояние		Способы реализации состояния		Число способов реализации данного состояния (W)
число молекул слева	число молекул справа	№ молекул, находящихся слева	№ молекул, находящихся справа	
0	4	—	1, 2, 3, 4	1
1	3	1 2 3 4	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	4
2	2	1, 2 1, 3 1, 4 2, 3 2, 4 3, 4	3, 4 2, 4 2, 3 1, 4 1, 3 1, 2	6
3	1	1, 2, 3 1, 2, 4 1, 3, 4 2, 3, 4	4 3 2 1	4
4	0	1, 2, 3, 4	—	1
		Всего способов		$2^4 = 16$

Поэтому каждое из 16 распределений молекул осуществляется одинаково часто. Следовательно, число способов реализации данного состояния определяет вероятность этого состояния.

Как мы видели, в случае четырех молекул имеется большая вероятность (равная  $1/8$ ) того, что все молекулы соберутся в одной из половин сосуда. Однако с увеличением числа молекул положение сильно меняется. В таблице 13 приведены числа способов реализации различных состояний для десяти молекул. В этом случае вероятность того, что все молекулы соберутся в одной из половин сосуда, равна всего лишь  $1/512$ . В подавляющем числе случаев (в 672 случаях из 1024) в обеих частях сосуда получается одинаковое (5—5) или почти одинаковое (6—4 либо 4—6) количество молекул.

Можно показать, что полное число способов распределения  $N$  молекул между двумя половинами сосуда равно  $2^N$  (в справедливости этого для  $N = 4$  и  $N = 10$  мы имели возможность убедиться). Поэтому если число молекул  $N$  равно, например,  $10^{20}$ , то, вероятность того, что все молекулы соберутся в одной из половин сосуда, будет исчезающе мала (она равна двум, деленным на два в степени  $10^{20}$ ).

Таблица 13

Число молекул		W
слева	справа	
0	10	1
1	9	10
2	8	45
3	7	120
4	6	210
5	5	252
6	4	210
7	3	120
8	2	45
9	1	10
10	0	1
Всего		$2^{10} = 1024$

Предположим, что вначале газ находился в левой половине сосуда, которая отделялась перегородкой от правой пустой половины. Если убрать перегородку, газ самопроизвольно распространится на весь сосуд. Этот процесс будет необратим, так как вероятность того, что в результате теплового движения все молекулы соберутся в одной из половин сосуда, как мы видели, практически равна нулю. Следовательно, сам по себе, без воздействия извне, газ не сможет снова сосредоточиться в левой половине сосуда.

Таким образом, процесс распространения газа на весь сосуд оказывается необратимым вследствие того, что обратный ему процесс маловероятен. Этот вывод может быть распространен и на другие процессы. Всякий необратимый процесс — это такой процесс, обратный которому крайне маловероятен.

### § 136. Энтропия идеального газа

Найдем выражение для энтропии идеального газа. Поскольку энтропия аддитивна, достаточно найти ее значение для киломоля газа  $S_{км}$ . Энтропия произвольной массы газа  $m$  будет равна  $S = \frac{m}{\mu} S_{км}$ .

Будем исходить из уравнения (96.4) первого начала термодинамики, подставив в него выражение  $dU$  для идеального газа:

$$d'Q_{\text{км}} = C_V dT + p dV_{\text{км}}.$$

Разделив  $d'Q_{\text{км}}$  на  $T$ , получим  $dS_{\text{км}}$  (см. (133.5); процесс предполагается обратимым):

$$dS_{\text{км}} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV_{\text{км}}. \quad (136.1)$$

В соответствии с уравнением состояния идеального газа  $p/T$  равно  $R/V_{\text{км}}$ . Следовательно, (136.1) можно записать так:

$$dS_{\text{км}} = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV_{\text{км}}}{V_{\text{км}}}.$$

Взяв от  $dS_{\text{км}}$  неопределенный интеграл, получим:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln T + R \ln V_{\text{км}} + S_{0\text{км}}, \quad (136.2)$$

где  $S_{0\text{км}}$  — постоянная интегрирования. Формула (136.2) дает выражение энтропии киломоля идеального газа в переменных  $T$  и  $V$ . С помощью уравнения состояния можно перейти к выражениям  $S_{\text{км}}$  в других переменных. Подставив в (136.2)  $V_{\text{км}} = RT/p$ , получим:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln T + R \ln R + R \ln T - R \ln p + S_{0\text{км}}.$$

Обозначив  $R \ln R + S_{0\text{км}}$  через  $S'_{0\text{км}}$  и учитывая, что для идеального газа  $C_V + R$  равно  $C_p$ , можно написать:

$$S_{\text{км}} = C_p \ln T - R \ln p + S'_{0\text{км}}. \quad (136.3)$$

Наконец, заменяя в (136.2)  $T$  через  $p V_{\text{км}}/R$ , можно получить:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln p + C_p \ln V_{\text{км}} + S''_{0\text{км}}, \quad (136.4)$$

где

$$S''_{0\text{км}} = S_0 - C_V \ln R.$$

Вычислим изменение энтропии при смешении двух разных газов. Пусть два разных газа, каждый в количестве одного киломоля, находятся при одинаковых давлении  $p$  и температуре  $T$  в равных, разделенных пере-



городкой объемах  $V$  (рис. 302). Если убрать перегородку, газы начнут взаимно диффундировать, в результате чего каждый из них распространяется на объем  $2V$ . В образовавшейся смеси парциальное давление обоих газов будет равно  $p/2$ . Процесс смешения газов, очевидно, необратим, так что должен сопровождаться возрастанием энтропии системы. Используя выражение (136.3), начальное значение энтропии системы, равное сумме энтропий обоих газов, можно записать в виде

$$S_{\text{нач}} = (C_{p1} \ln T - R \ln p + S'_{01}) + (C_{p2} \ln T - R \ln p + S'_{02}). \quad (136.5)$$

Энтропию после смешения можно вычислить как сумму энтропий обеих компонент смеси:

$$S_{\text{кон}} = \left( C_{p1} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{01} \right) + \left( C_{p2} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{02} \right).$$

Приращение энтропии равно

$$\Delta S = S_{\text{кон}} - S_{\text{нач}} = 2R \ln p - 2R \ln \frac{p}{2} = 2R \ln 2. \quad (136.6)$$

Таким образом, энтропия при смешении газов действительно возрастает.

То обстоятельство, что приращение энтропии оказывается одинаковым для любой пары разных газов (оно равно  $2R \ln 2$ ), позволяет, казалось бы, распространить результат (136.6) на случай тождественных компонент, т. е. на тот случай, когда по разные стороны перегородки находится предварительно один и тот же газ. Переход от различных компонент к тождественным приводит к парадоксу Гиббса: удаление перегородки не вызывает ни диффузии, ни каких-либо других необратимых процессов и вместе с тем как будто бы сопровождается возрастанием энтропии, равным (136.6). Но распространение (136.6) на случай тождественных компонент неправомерно. Формула (136.6) получена для различных компонент, каждой из которых в смеси может быть

$\mu_1$	$\mu_2$
$p_1 = p$	$p_2 = p$
$V_1 = V$	$V_2 = V$

Рис. 302.

приписано парциальное давление  $p_i$ . В случае же тождественных компонент после удаления перегородки получается не смесь, а тот же газ, что и вначале, при том же давлении  $p$ , но в количестве двух молей. Его энтропия  $S_{\text{кон}}$  по формуле (136.3) равна (поскольку количество газа равно двум молям, выражение (136.3) нужно удвоить)

$$S_{\text{кон}} = 2 [C_p \ln T - R \ln p + S'_{0 \text{ км}}],$$

что, как легко видеть, равно выражению (136.5) для  $S_{\text{нач}}$ , если в последнем положить  $C_{p1} = C_{p2} = C_p$  и  $S'_{01} = S'_{02} = S'_{0 \text{ км}}$ .

## КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

## § 137. Отличительные черты кристаллического состояния

Подавляющее большинство твердых тел в природе имеет кристаллическое строение. Так, например, почти все минералы и все металлы в твердом состоянии являются кристаллами.

Характерная черта кристаллического состояния, отличающая его от жидкого и газообразного состояний, заключается в наличии анизотропии, т. е. зависимости ряда физических свойств (механических, тепловых, электрических, оптических) от направления.

Тела, свойства которых одинаковы по всем направлениям, называются изотропными. Изотропны, кроме газов и, за отдельными исключениями, всех жидкостей, также аморфные твердые тела. Последние представляют собой переохлажденные жидкости (см. § 149).

Причиной анизотропии кристаллов служит упорядоченное расположение частиц (атомов или молекул), из которых они построены.

Упорядоченное расположение частиц проявляется в правильной внешней огранке кристаллов. Кристаллы ограничены плоскими гранями, пересекающимися под некоторыми, определенными для каждого данного рода кристаллов, углами. Раскалывание кристаллов легче происходит по определенным плоскостям, называемым плоскостями спайности.

Правильность геометрической формы и анизотропия кристаллов обычно не проявляются по той причине, что кристаллические тела встречаются, как правило,

в виде поликристаллов, т. е. конгломератов множества сросшихся между собой, беспорядочно ориентированных мелких кристалликов. В поликристаллах анизотропия наблюдается только в пределах каждого отдельно взятого кристаллика, тело же в целом вследствие беспорядочной ориентации кристалликов анизотропии не обнаруживает.

Создав специальные условия кристаллизации из расплава или раствора, можно получить большие одиночные кристаллы — монокристаллы любого вещества. Монокристаллы некоторых минералов встречаются в природе в естественном состоянии.

Упорядоченность расположения атомов кристалла заключается в том, что атомы (или молекулы) размещаются в узлах геометрически правильной пространственной решетки. Весь кристалл может быть получен путем многократного повторения в трех различных направлениях одного и того же структурного элемента, называемого элементарной кристаллической ячейкой (рис. 303, а). Длины ребер  $a$ ,  $b$  и  $c$

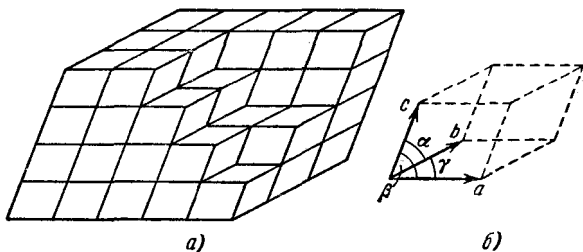


Рис. 303.

кристаллической ячейки называются периодами идентичности кристалла.

Кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на трех векторах  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , модули которых равны периодам идентичности. Этот параллелепипед, кроме ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , характеризуется также углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  между ребрами (рис. 303, б). Величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  однозначно определяют элементарную ячейку и называются ее параметрами.

Элементарную ячейку можно выбрать различными способами. Это показано на рис. 304 на примере пло-

ской структуры. Облицовку стены чередующимися светлыми и темными треугольными плитками можно получить многократным повторением в двух направлениях различных ячеек (см., например, ячейки 1, 2 и 3; стрелками указаны направления, в которых повторяются ячейки). Ячейки 1 и 2 отличаются тем, что включают минимальное количество структурных элементов (по одной светлой и по одной темной плитке).

Кристаллическая ячейка, включающая наименьшее число атомов, характеризующих химический состав кристаллического вещества (например, один атом кислорода и два атома водорода для кристалла льда), называется примитивной ячейкой. Однако обычно вместо примитивной выбирают элементарную ячейку с большим числом атомов, но обладающую такой же симметрией, как и весь кристалл в целом. Так, изображенная на рис. 304 плоская структура совпадает сама с собой при повороте на  $120^\circ$  вокруг любой перпендикулярной к ней оси, проходящей через вершины плиток. Таким же свойством обладает элементарная ячейка 3. Ячейки 1 и 2 имеют меньшую степень симметрии: они совпадают сами с собой только при повороте на  $360^\circ$ .

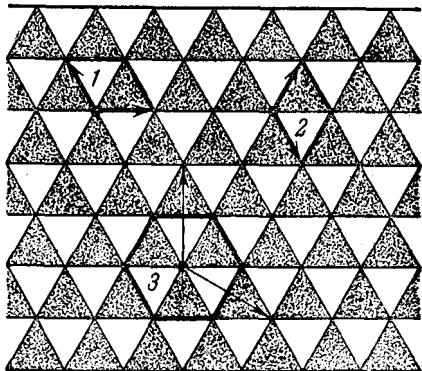


Рис. 304.

### § 138. Классификация кристаллов

Кристаллическая решетка может обладать различными видами симметрии. Под симметрией кристаллической решетки понимается свойство решетки совпадать с самой собой при некоторых пространственных перемещениях.

Всякая решетка прежде всего обладает трансляционной симметрией, т. е. совпадает сама с собой при перемещении (трансляции) на величину периода идентично-

сти<sup>1)</sup>). Из других видов симметрии отметим симметрию по отношению к поворотам вокруг некоторых осей, а также к зеркальному отражению относительно определенных плоскостей.

Если решетка совпадает сама с собой при повороте вокруг некоторой оси на угол  $2\pi/n$  (следовательно, за один полный поворот вокруг оси решетка совпадает сама с собой  $n$  раз), то эта ось называется осью симметрии  $n$ -го порядка. Можно показать, что, кроме тривиальной оси 1-го порядка, возможны только оси симметрии 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядка. Примеры структур, обладающих такими осями симметрии, показаны схематически на рис. 305 (белыми кружками, черными

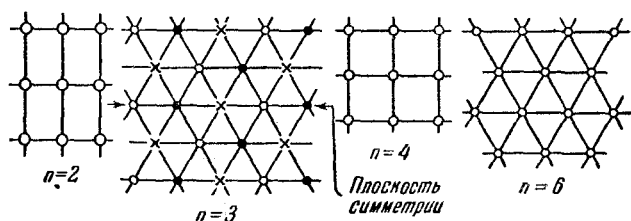


Рис. 305.

кружками и крестиками обозначены атомы разных сортов).

Плоскости, при зеркальном отражении от которых решетка совпадает сама с собой, называются плоскостями симметрии. Пример плоскости симметрии также дан на рис. 305.

Различные виды симметрии называются элементами симметрии кристаллической решетки. Кроме осей и плоскостей возможны другие элементы симметрии, в рассмотрение которых мы, однако, входить не станем.

Кристаллическая решетка, как правило, обладает одновременно несколькими видами симметрии. Однако не всякое сочетание элементов симметрии оказывается возможным. Как показал выдающийся русский ученый Е. С. Федоров, возможны 230 комбинаций элементов

<sup>1)</sup> При рассмотрении симметрии решетки отвлекаются от конечных размеров кристалла и считают решетку бесконечной.

симметрии, получившие название пространственных групп. Эти 230 пространственных групп разбиваются по признакам симметрии на 32 класса. Наконец, по форме элементарной ячейки все кристаллы делятся на семь кристаллографических систем (или сингоний), каждая из которых включает в себя несколько классов симметрии.

В порядке возрастающей симметрии кристаллографические системы располагаются следующим образом.

1. Триклинная система. Для нее характерно, что  $a \neq b \neq c$ ;  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ . Элементарная ячейка имеет форму косоугольного параллелепипеда.

2. Моноклинная система. Два угла — прямые, третий (в качестве которого принято выбирать угол  $\beta$ ) отличен от прямого. Следовательно,  $a \neq b \neq c$ ;  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ;  $\beta \neq 90^\circ$ . Элементарная ячейка имеет форму прямой призмы, в основании которой лежит параллелограмм (т. е. форму прямого параллелепипеда).

3. Ромбическая система. Все углы — прямые, все ребра — разные:  $a \neq b \neq c$ ;  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Элементарная ячейка имеет форму прямоугольного параллелепипеда.

4. Тетрагональная система. Все углы — прямые, два ребра — одинаковые:  $a = b \neq c$ ;  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Элементарная ячейка имеет форму прямой призмы с квадратным основанием.

5. Ромбоэдрическая (или тригональная) система. Все ребра — одинаковые, все углы также одинаковые и отличные от прямого:  $a = b = c$ ;  $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ . Элементарная ячейка имеет форму куба, деформированного сжатием или растяжением вдоль диагонали.

6. Гексагональная система. Ребра и углы между ними удовлетворяют условиям:  $a = b \neq c$ ;  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Если составить вместе три элементарные ячейки так, как показано на рис. 306, то получается правильная шестигранная призма.

7. Кубическая система. Все ребра — одинаковые, все углы — прямые:  $a = b = c$ ;  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Элементарная ячейка имеет форму куба.

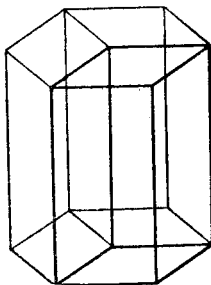


Рис. 306.

В зависимости от природы частиц, помещающихся в узлах кристаллической решетки, и от характера сил взаимодействия между частицами различают четыре типа кристаллических решеток и соответственно четыре типа кристаллов: ионные, атомные, металлические и молекулярные.

1. Ионные кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются ионы разных знаков. Силы взаимодействия между ними являются в основном электростатическими (кулоновскими). Связь, обусловленная электростатическими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется гетерополярной (или ионной). Типичным примером ионной решетки может служить изображенная на рис. 307 решетка каменной соли (NaCl). Эта решетка принадлежит к кубической системе. Белыми кружками изображены несущие положительный заряд ионы натрия, черными кружками — отрицательные ионы хлора. Как видно из рисунка, ближайшими соседями иона данного знака будут ионы противоположного знака. В газообразном состоянии NaCl состоит из молекул, в которых объединяются попарно ионы натрия с ионами хлора. Образующая молекулу группировка из иона Na и иона Cl утрачивает в кристалле обособленное существование. Ионный кристалл состоит не из молекул, а из ионов. Весь кристалл в целом можно рассматривать как одну гигантскую молекулу.

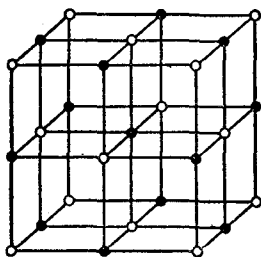


Рис. 307.

2. Атомные кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются нейтральные атомы. Связь, объединяющая в кристалле (а также и в молекуле) нейтральные атомы, называется гомеополярной (или ковалентной). Силы взаимодействия при гомеополярной связи имеют также электрический (но не кулоновский) характер. Объяснение этих сил может быть дано только на основе квантовой механики,



Гомеополярная связь осуществляется электронными парами. Это означает, что в обеспечении связи между двумя атомами участвует по одному электрону от каждого атома. По этой причине гомеополярная связь имеет направленный характер. При гетерополярной связи каждый ион воздействует на все достаточно близкие к нему ионы. При гомеополярной связи воздействие направлено на тот атом, с которым у данного атома имеется совместная электронная пара. Гомеополярная связь может осуществляться только валентными, т. е. наименее связанными с атомом электронами. Поскольку каждый электрон может обеспечить связь только с одним атомом, число связей, в которых может участвовать данный атом (число соседей, с которыми он может быть связан), равно его валентности.

Типичными примерами атомных кристаллов могут служить алмаз и графит. Оба эти вещества тождественны по химической природе (они построены из атомов

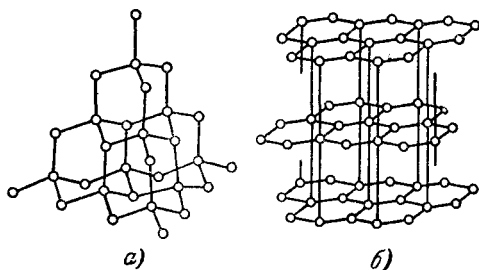


Рис. 308.

углерода), но отличаются кристаллическим строением. На рис. 308, *a* показана решетка алмаза, на рис. 308, *б* — решетка графита. На этом примере отчетливо видно влияние кристаллической структуры на свойства вещества.

Такую же решетку, как у алмаза (решетку типа алмаза), имеют типичные полупроводники — германий (Ge) и кремний (Si). Для этой решетки характерно то, что каждый атом окружен четырьмя равноотстоящими от него соседями, расположенными в вершинах правильного тетраэдра. Каждый из четырех валентных электронов входит в электронную пару, связывающую данный атом с одним из соседей.

3. Металлические кристаллы. Во всех узлах кристаллической решетки расположены положительные ионы металла. Между ними беспорядочно, подобно молекулам газа, движутся электроны, отщепившиеся от атомов при образовании ионов. Эти электроны играют роль «цемента», удерживая вместе положительные ионы; в противном случае решетка распалась бы под действием сил отталкивания между ионами. Вместе с тем и электроны удерживаются ионами в пределах кристаллической решетки и не могут ее покинуть.

Большинство металлов имеет решетки одного из трех типов: кубическую объемноцентрированную (рис. 309, а),

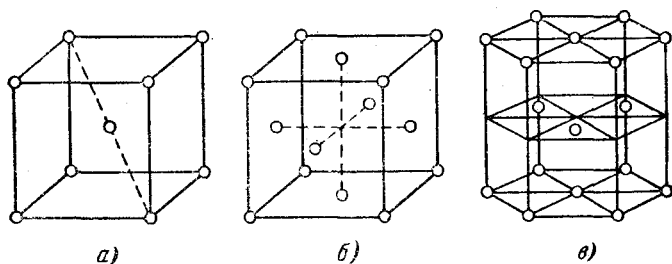


Рис. 309.

кубическую гранецентрированную (рис. 309, б) и так называемую полную гексагональную (рис. 309, в). Последняя представляет собой гексагональную решетку с отношением  $c/a$ , равным  $\sqrt{8/3}$ . Кубическая гранецентрированная и плотная гексагональная решетки соответствуют наиболее плотной упаковке одинаковых шаров,

4. Молекулярные кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются определенным образом ориентированные молекулы. Силы связи между молекулами в кристалле имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящие к отклонению газов от идеальности. По этой причине их называют ван-дер-ваальсовскими силами. Молекулярные решетки образуют, например, следующие вещества:  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$ . Таким образом, обычный лед, а также так называемый сухой лед (твердая углекислота) представляют собой молекулярные кристаллы,

## § 140. Тепловое движение в кристаллах

Узлы кристаллической решетки определяют средние положения частиц. Сами же частицы (ионы, атомы или молекулы) непрерывно колеблются около этих средних положений, причем интенсивность колебаний растет с температурой.

Силы притяжения между частицами, образующими кристалл, на достаточно малых расстояниях сменяются быстро возрастающими с уменьшением расстояния силами отталкивания. Это справедливо и для двух разноименных ионов, так как при большом сближении электронных оболочек ионов начинают сильно сказываться силы отталкивания между ними<sup>1)</sup>.

Таким образом, взаимодействие между частицами любого вида в кристалле может быть представлено потенциальной кривой, изображенной на рис. 310 (ср. с рис. 264). Кривая несимметрична относительно минимума. По этой причине только очень малые колебания частиц около положения равновесия будут иметь гармонический характер. С ростом амплитуды колебаний (что происходит при повышении температуры) все сильнее будет проявляться ангармоничность (т. е. отклонение колебаний от гармонических). Это приводит, как видно из рис. 310, к возрастанию средних расстояний между частицами и, следовательно, к увеличению объема кристалла. Так объясняется тепловое расширение кристаллов.

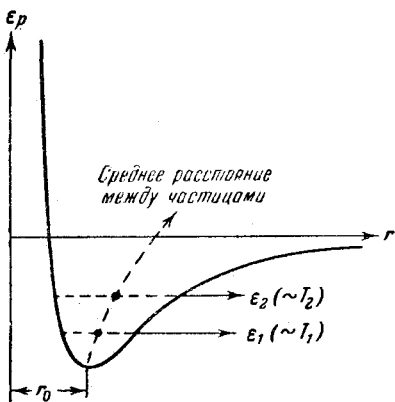


Рис. 310.

## § 141. Теплоемкость кристаллов

Расположение частиц в узлах кристаллической решетки отвечает минимуму их взаимной потенциальной

<sup>1)</sup> Взаимодействие между ионами имеет более сложный характер, чем взаимодействие между двумя точечными зарядами.

энергии. При смещении частиц из положения равновесия в любом направлении появляется сила, стремящаяся вернуть частицу в первоначальное положение, вследствие чего возникают колебания частицы. Колебания вдоль произвольного направления можно представить как наложение колебаний вдоль трех координатных осей. Таким образом, каждой частице в кристалле следует приписывать три колебательные степени свободы.

Как было выяснено в § 101, на каждую колебательную степень свободы одной частицы в среднем приходится энергия, равная двум половинкам  $kT$  — одна в виде кинетической и одна в виде потенциальной энергии. Следовательно, на каждую частицу — атом в атомной решетке, ион в ионной или металлической решетке<sup>1)</sup> — приходится в среднем энергия, равная  $3kT$ . Энергию киломоля вещества в кристаллическом состоянии можно найти, умножив среднюю энергию одной частицы на число частиц, помещающихся в узлах кристаллической решетки. Последнее число совпадает с числом Авогадро  $N_A$  только в случае химически простых веществ. В случае такого, например, вещества, как NaCl, число частиц будет равно  $2N_A$ , ибо в моле NaCl содержится  $N_A$  атомов Na и  $N_A$  атомов Cl.

Ограничиваясь рассмотрением химически простых веществ, образующих атомные или металлические кристаллы, для внутренней энергии килограмм-атома вещества в кристаллическом состоянии можно написать выражение

$$U_{\text{км}} = N_A 3kT = 3RT.$$

Приращение внутренней энергии, соответствующее повышению температуры на один градус, равно согласно (102.6) теплоемкости при постоянном объеме. Следовательно,

$$C_V = 3R \approx 25 \cdot 10^3 \text{ Дж/град} \cdot \text{кг-ат.} \quad (141.1)$$

Поскольку объем твердых тел при нагревании меняется мало, их теплоемкость при постоянном давлении незначительно отличается от теплоемкости при постоян-

<sup>1)</sup> В случае молекулярных кристаллов дело обстоит несколько сложнее. Молекулы наряду с поступательными колебаниями совершают также крутильные колебания. Кроме того, происходят колебания атомов внутри молекул,

ном объеме, так что можно положить  $C_p \approx C_v$  и говорить просто о теплоемкости твердого тела.

Итак, согласно (141.1) килограмм-атомная теплоемкость химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова и равна  $25 \cdot 10^3$  дж/град·кг-ат. Это утверждение составляет содержание закона Дюлонга и Пти, установленного опытным путем. Закон выполняется с довольно хорошим приближением для многих веществ при комнатной температуре. Однако, например, алмаз имеет при комнатной температуре теплоемкость, равную  $5,6 \cdot 10^3$  дж/град·кг-ат. Более того, вопреки (141.1), теплоемкость кристаллов зависит от температуры, причем зависимость имеет характер, показанный на рис. 311. Вблизи абсолютно нуля теплоемкость всех тел пропорциональна  $T^3$ , и только при достаточно высокой, характерной для каждого вещества температуре начинает выполняться (141.1). У большинства тел это достигается уже при комнатной температуре, у алмаза же теплоемкость достигает значения (141.1) лишь при температуре порядка  $1000^\circ\text{C}$ .

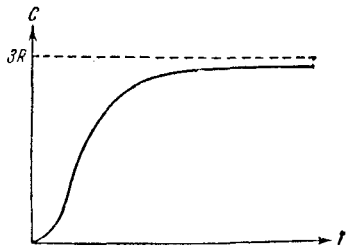


Рис. 311.

Строгая теория теплоемкости твердых тел, созданная Эйнштейном и Дебаем, учитывает, во-первых, квантование энергии колебательного движения (см. § 102). Во-вторых, теория учитывает, что колебания частиц в кристаллической решетке не являются независимыми. Сместившаяся из положения равновесия частица увлекает с собой ближайшие к ней частицы. Сильное взаимодействие между частицами кристалла приводит к тому, что возмущение, вызванное колебанием какой-либо частицы, передается другим частицам и порождает в кристалле бегущую волну. Достигнув границы кристалла, волна отражается. При наложении прямой и отраженной волн возникают, как известно, стоячие волны. Стоячие волны в ограниченной среде должны удовлетворять определенным условиям (таким условием может быть, например, требование, чтобы на границе среды имела место пучность волны). Эти условия налагают ограничения

на возможные длины стоячих волн или частоты колебаний. Известно, например, что в струне с закрепленными концами возможны только стоячие волны с длиной  $\lambda$ , удовлетворяющей условию  $l = n\lambda/2$ , где  $l$  — длина струны, а  $n$  — целое число. Таким образом, тепловое движение в кристаллах может быть представлено как наложение стоячих волн с целым набором (спектром) дискретных частот.

Квантовая теория теплоемкости кристаллов находится в хорошем согласии с опытными данными, в частности, для высоких температур она приводит к выражению (141.1).

## ЖИДКОЕ СОСТОЯНИЕ

## § 142. Строение жидкостей

Жидкое состояние, занимая промежуточное положение между газами и кристаллами, сочетает в себе некоторые черты обоих этих состояний. В частности, для жидкостей, как и для кристаллических тел, характерно наличие определенного объема, и вместе с тем жидкость, подобно газу, принимает форму того сосуда, в котором она находится. Далее, для кристаллического состояния характерно упорядоченное расположение частиц (атомов или молекул), в газах в этом смысле царит полный хаос. Согласно рентгенографическим исследованиям, в отношении характера расположения частиц жидкости также занимают промежуточное положение. В расположении частиц жидкости наблюдается так называемый ближний порядок. Это означает, что по отношению к любой частице расположение ближайших к ней соседей является упорядоченным. Однако по мере удаления от данной частицы расположение по отношению к ней других частиц становится все менее упорядоченным и довольно быстро порядок в расположении частиц полностью исчезает. В кристаллах имеет место дальний порядок — упорядоченное расположение частиц по отношению к любой частице наблюдается в пределах значительного объема.

Наличие в жидкостях ближнего порядка служит причиной того, что структуру жидкостей называют квазикристаллической (кристаллоподобной).

Из-за отсутствия дальнего порядка жидкости (за исключением так называемых жидких кристаллов) не

обнаруживают анизотропии, характерной для кристаллов с их правильным расположением частиц.

В жидкостях с удлиненными молекулами наблюдается одинаковая ориентация молекул в пределах значительного объема, чем обуславливается анизотропия оптических и некоторых других свойств. Такие жидкости получили название жидких кристаллов. У них упорядочена только ориентация молекул, взаимное же расположение молекул, как и в обычных жидкостях, дальнего порядка не обнаруживает.

Промежуточным положением жидкостей обусловлено то обстоятельство, что жидкое состояние оказывается особенно сложным по своим свойствам. Поэтому его теория гораздо менее развита, чем теория кристаллического и, особенно, газообразного состояний. До сих пор нет вполне законченной и общепризнанной теории жидкостей. Значительные заслуги в разработке ряда проблем теории жидкого состояния принадлежат советскому ученому Я. И. Френкелю.

Согласно Френкелю, тепловое движение в жидкостях имеет следующий характер. Каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия. Время от времени молекула меняет место равновесия, скачком перемещаясь в новое положение, отстоящее от предыдущего на расстоянии порядка размеров самих молекул. Таким образом, молекулы лишь медленно перемещаются внутри жидкости, пребывая часть времени около определенных мест. По образному выражению Я. И. Френкеля, молекулы странствуют по всему объему жидкости, ведя кочевой образ жизни, при котором кратковременные переезды сменяются относительно длинными периодами оседлой жизни. Длительности этих стоянок весьма различны и беспорядочно чередуются друг с другом, но средняя длительность колебаний около того же положения равновесия оказывается у каждой жидкости определенной величиной, резко убывающей при повышении температуры. В связи с этим при повышении температуры сильно возрастает подвижность молекул, что в свою очередь влечет за собой уменьшение вязкости жидкостей.

Существуют твердые тела, которые во многих отношениях оказываются ближе к жидкостям, чем к кристаллам. Такие тела, называемые аморфными, не обна-



руживают анизотропии. В расположении их частиц имеется, как и у жидкостей, только ближний порядок. Переход от аморфного твердого тела к жидкости при нагревании осуществляется непрерывно, в то время как переход от кристалла к жидкости совершается скачком (подробнее об этом будет сказано в § 149). Все это дает основание рассматривать аморфные твердые тела как переохлажденные жидкости, частицы которых вследствие сильно возросшей вязкости имеют ограниченную подвижность.

Типичным примером аморфного твердого тела служит стекло. К числу аморфных тел относятся также смолы, битумы и т. п.

### § 143. Поверхностное натяжение

Молекулы жидкости располагаются настолько близко друг к другу, что силы притяжения между ними имеют значительную величину. Поскольку взаимодействие быстро убывает с расстоянием (см. кривую на рис. 264), начиная с некоторого расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние  $r$ , как мы уже знаем (см. § 118), называется радиусом молекулярного действия, а сфера радиуса  $r$  называется сферой молекулярного действия. Радиус молекулярного действия имеет величину порядка нескольких эффективных диаметров молекулы.

Каждая молекула испытывает притяжение со стороны всех соседних с ней молекул, находящихся в пределах сферы молекулярного действия, центр которой совпадает с данной молекулой. Равнодействующая всех этих сил для молекулы, находящейся от поверхности жидкости на расстоянии, превышающем  $r$ , очевидно, в среднем равна нулю (рис. 312). Иначе обстоит дело, если молекула находится на расстоянии от поверхности, меньшем чем  $r$ . Так как плотность пара (или газа, с которым граничит жидкость) во много раз меньше плотности жидкости, выступающая за пределы жидкости часть сферы молекулярного действия будет менее заполнена

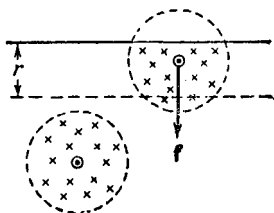


Рис. 312.

молекулами, чем остальная часть сферы. В результате на каждую молекулу, находящуюся в поверхностном слое толщиной  $r$ , будет действовать сила, направленная внутрь жидкости. Величина этой силы растет в направлении от внутренней к наружной границе слоя.

Переход молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой связан с необходимостью совершения работы против действующих в поверхностном слое сил. Эта работа совершается молекулой за счет запаса ее кинетической энергии и идет на увеличение потенциальной энергии молекулы, подобно тому как работа, совершаемая летящим вверх телом против сил земного тяготения, идет на увеличение потенциальной энергии тела. При обратном переходе молекулы в глубь жидкости потенциальная энергия, которой обладала молекула в поверхностном слое, переходит в кинетическую энергию молекулы.

Итак, молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией. Поверхностный слой в целом обладает дополнительной энергией, которая входит составной частью во внутреннюю энергию жидкости.

Поскольку положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, жидкость, предоставленная самой себе, будет принимать форму с минимальной поверхностью, т. е. форму шара. Обычно мы наблюдаем не жидкости, «предоставленные самим себе», а жидкости, подверженные действию сил земного тяготения. В этом случае жидкость принимает форму, соответствующую минимуму суммарной энергии — энергии в поле сил тяготения и поверхностной энергии.

При увеличении размеров тела объем растет как куб линейных размеров, а поверхность — только как квадрат. Поэтому пропорциональная объему тела энергия в поле тяготения изменяется с размерами тела быстрее, чем поверхностная энергия. У малых капель жидкости преобладающую роль играет поверхностная энергия, вследствие чего такие капли имеют форму, близкую к сферической. Большие капли жидкости сплющиваются под действием сил тяготения, несмотря на то, что поверхностная энергия при этом возрастает. Большие массы жидкости принимают форму сосуда, в который они налиты, с горизонтальной свободной поверхностью.

Из-за наличия поверхностной энергии жидкость обнаруживает стремление к сокращению своей поверхности. Жидкость ведет себя так, как если бы она была заключена в упругую растянутую пленку, стремящуюся сжаться. Следует иметь в виду, что никакой пленки, ограничивающей жидкость снаружи, на самом деле нет. Поверхностный слой состоит из тех же молекул, что и вся жидкость, и взаимодействие между молекулами имеет в поверхностном слое тот же характер, что и внутри жидкости. Дело заключается лишь в том, что молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости.

Выделим мысленно часть поверхности жидкости, ограниченную замкнутым контуром. Тенденция этого участка к сокращению приводит к тому, что он действует на граничащие с ним участки с силами, распределенными по всему контуру (по третьему закону Ньютона внешние участки поверхностного слоя действуют на рассматриваемую часть поверхности с силами такой же величины, но противоположного направления). Эти силы называются силами поверхностного натяжения. Направлена сила поверхностного натяжения по касательной к поверхности жидкости, перпендикулярно к участку контура, на который она действует.

Обозначим силу поверхностного натяжения, приходящуюся на единицу длины контура, через  $\alpha$ . Эту величину называют коэффициентом поверхностного натяжения. Измеряют ее в ньютонах на метр (в СИ) или в динах на сантиметр (в СГС-системе). Величина коэффициента поверхностного натяжения зависит от природы жидкости и от условий, в которых она находится, в частности от температуры.

Рассмотрим какой-либо процесс, в ходе которого поверхность жидкости возрастает за счет действия внешних сил. Это происходит, например, при вытекании жидкости из узкой трубки (рис. 313). Жидкость из такой трубки вытекает по каплям. Непосредственно перед отрывом капля висит на шейке, форму которой можно

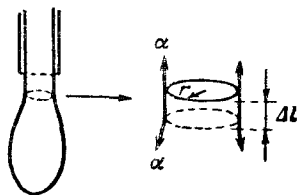


Рис. 313.

приблизительно считать цилиндрической. Вес капли уравнивается силами поверхностного натяжения, действующими по контуру, ограничивающему поперечное сечение шейки. Результирующую этих сил можно представить в виде  $2\pi r\alpha$ , где  $r$  — радиус шейки. При возрастании длины шейки на  $\Delta l$  сила тяжести совершает работу

$$A' = 2\pi r\alpha \Delta l = \alpha \Delta \sigma,$$

где  $\Delta \sigma = 2\pi r\Delta l$  — приращение поверхности капли (для обозначения поверхности использована буква  $\sigma$ , так как буквой  $S$  в этом параграфе мы будем обозначать энтропию).

Если бы процесс увеличения поверхности протекал адиабатически, то совершаемая над жидкостью работа была бы равна приращению внутренней энергии жидкости:  $\Delta U = A' = \alpha \Delta \sigma$ . Однако в этом случае приращение внутренней энергии слагалось бы не только из приращения поверхностной энергии  $\Delta U_{\text{пов}}$ , но и из приращения объемной энергии, т. е. энергии внутренних частей жидкости  $\Delta U_{\text{об}}$ . Это вызвано тем, что увеличение поверхности сопровождается охлаждением жидкости (напомним, что при переходе молекул из глубины жидкости в поверхностный слой скорость молекул уменьшается). Для того чтобы внутренняя энергия изменялась только за счет поверхностной энергии (т. е. чтобы  $\Delta U = \Delta U_{\text{пов}}$ ), процесс увеличения поверхности жидкости нужно производить изотермически. В этом случае увеличение поверхности жидкости за счет совершения работы  $A' = \alpha \Delta \sigma$  будет сопровождаться притоком из окружающей жидкости среды тепла  $Q = T\Delta S = \Delta(TS)$ . Поскольку энтропия — величина аддитивная, под  $S$  в этом выражении можно понимать энтропию поверхностного слоя жидкости (состояние, а следовательно, и энтропия внутренних частей жидкости не изменяется). Таким образом, приращение внутренней энергии будет равно

$$\Delta U = \Delta U_{\text{пов}} = A' + Q = \alpha \Delta \sigma + \Delta(TS)_{\text{пов}}.$$

Последнее соотношение можно представить в виде:

$$\alpha \Delta \sigma = \Delta(U - TS)_{\text{пов}} = \Delta F_{\text{пов}},$$

где  $\Delta F_{\text{пов}}$  — свободная энергия<sup>1)</sup> поверхностного слоя площади  $\Delta\sigma$ .

Итак, мы пришли к выводу, что коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$  равен свободной энергии, приходящейся на единицу поверхности жидкости. Поэтому его можно выражать не только в ньютонах на метр (или динах на сантиметр), но и в джоулях на квадратный метр (соответственно в эргах на квадратный сантиметр).

Таблица 14

Вещество	$\alpha$ , н/м
Ртуть . . . . .	0,490
Вода . . . . .	0,073
Бензол . . . . .	0,029
Спирт . . . . .	0,023
Эфир . . . . .	0,020

В таблице 14 приведены значения  $\alpha$  для некоторых жидкостей при комнатной температуре.

Примеси сильно сказываются на величине поверхностного натяжения. Так, например, растворение в воде мыла снижает ее коэффициент поверхностного натяжения до 0,045 н/м. Растворение в воде NaCl, напротив, приводит к увеличению коэффициента поверхностного натяжения.

С повышением температуры различие в плотностях жидкости и ее насыщенного пара уменьшается. В связи с этим уменьшается и коэффициент поверхностного натяжения. При критической температуре  $\alpha$  обращается в нуль.

#### § 144. Давление под изогнутой поверхностью жидкости

Рассмотрим поверхность жидкости, опирающуюся на некоторый плоский контур (рис. 314, а).

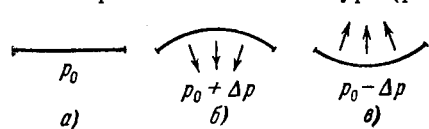


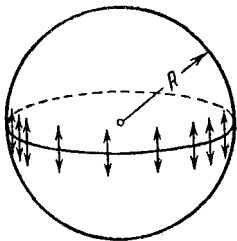
Рис. 314.

Если поверхность жидкости не плоская, то стремление ее к сокращению приведет к возникновению давления, дополнительного к тому, которое испытывает жидкость

с плоской поверхностью. В случае выпуклой поверхности это дополнительное давление положительно (рис. 314, б), в случае вогнутой поверхности — отрицательно (рис. 314, в). В последнем случае поверхностный слой, стремясь сократиться, растягивает жидкость.

<sup>1)</sup> См. формулу (133.14).

Величина добавочного давления, очевидно, должна возрастать с увеличением коэффициента поверхностного натяжения  $\alpha$  и кривизны поверхности. Вычислим добавочное давление для сферической поверхности жидкости. Для этого рассечем мысленно сферическую каплю жидкости диаметральной плоскостью на два полушария (рис. 315). Из-за поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой, равной



$$f = l\alpha = 2\pi R\alpha.$$

Эта сила прижимает друг к другу оба полушария по поверхности  $S = \pi R^2$  и, следовательно, обуславливает дополнительное давление

$$\Delta p = \frac{f}{S} = \frac{2\pi R\alpha}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R}. \quad (144.1)$$

Рис. 315.

Кривизна сферической поверхности всюду одинакова и определяется радиусом сферы  $R$ . Очевидно, что чем меньше  $R$ , тем больше кривизна сферической поверхности. Кривизну произвольной поверхности принято характеризовать так называемой средней кривизной, которая может оказаться различной для разных точек поверхности.

Средняя кривизна определяется через кривизну нормальных сечений. Нормальным сечением поверхности в некоторой точке называется линия пересечения этой поверхности с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в рассматриваемой точке. Для сферы любое нормальное сечение представляет собой окружность радиуса  $R$  ( $R$  — радиус сферы). Величина  $H = 1/R$  дает кривизну сферы. В общем случае различные нормальные сечения, проведенные через одну и ту же точку, имеют различную кривизну. В геометрии доказывается, что полусумма обратных радиусов кривизны:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (144.2)$$

для любой пары взаимно-перпендикулярных нормальных сечений имеет одно и то же значение. Эта величина и есть средняя кривизна поверхности в данной точке.

Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  в формуле (144.2) — алгебраические величины. Если центр кривизны нормального сечения

находится под данной поверхностью, соответствующий радиус кривизны положителен; если центр кривизны лежит над поверхностью, радиус кривизны отрицателен (рис. 316). Таким образом, неплоская поверхность может иметь среднюю кривизну, равную нулю. Для этого нужно, чтобы радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  были одинаковы по величине и противоположны по знаку.

Для сферы  $R_1 = R_2 = R$  и по формуле (144.2)  $H = 1/R$ . Подставляя это значение в (144.1), получаем для добавочного давления под сферической поверхностью

$$\Delta p = 2H\alpha. \quad (144.3)$$

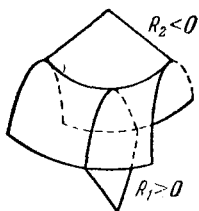


Рис. 316.

Как показал Лаплас, формула (144.3) справедлива для поверхности любой формы, если под  $H$  понимать среднюю кривизну поверхности в той точке, под которой определяется дополнительное давление. Подставив в (144.3) выражение (144.2) для средней кривизны, получим формулу для добавочного давления под произвольной поверхностью:

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (144.4)$$

Она называется формулой Лапласа.

Добавочное давление (144.4) обуславливает изменение уровня жидкости в узких трубках (капиллярах), вследствие чего называется иногда капиллярным давлением.

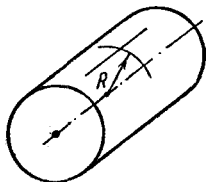


Рис. 317.

Рассмотрим поверхность, имеющую форму кругового цилиндра радиуса  $R$ . В качестве нормальных сечений возьмем сечение поверхности плоскостью, проходящей через ось цилиндра, и сечение плоскостью, перпендикулярной к оси (рис. 317). Первым сечением будет прямая ( $R_1 = \infty$ ), вторым — окружность радиуса  $R$  ( $R_2 = R$ ). Кривизна цилиндрической поверхности по формуле (144.2) равна  $1/2R$ , т. е. в 2 раза меньше, чем кривизна сферической поверхности того же радиуса. Дополнительное давление под

цилиндрической поверхностью радиуса  $R$  согласно формуле (144.4) равно

$$\Delta p = \frac{\alpha}{R}. \quad (144.5)$$

Если в жидкости имеется пузырек газа, то поверхность пузырька, стремясь сократиться, будет оказывать на газ дополнительное давление. Повторяя рассуждения, приведшие нас к формуле (144.1), можно показать, что величина этого давления равна  $2\alpha/R$ . Найдем радиус пузырька в воде, при котором добавочное давление равно 1 ат. Коэффициент поверхностного натяжения воды при  $20^\circ\text{C}$  равен  $0,073 \text{ н/м}$ , 1 ат соответствует примерно  $10^5 \text{ н/м}^2$ . Следовательно, для  $R$  получается следующее значение:

$$R = \frac{2\alpha}{\Delta p} = \frac{2 \cdot 0,073}{10^5} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Таким образом,  $\Delta p = 1 \text{ ат}$  при диаметре пузырька примерно 3 мк. Для пузырька диаметром 1 мм добавочное давление превышает 2 мм рт. ст.

### § 145. Явления на границе жидкости и твердого тела

Все сказанное в § 143 об особых условиях, в которых находятся молекулы поверхностного слоя, целиком относится также и к твердым телам. Следовательно, твердые тела, как и жидкости, обладают поверхностным натяжением.

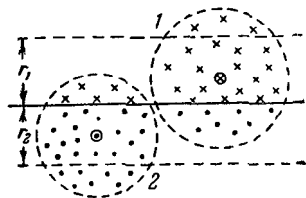


Рис. 318.

При рассмотрении явлений на границе раздела различных сред следует иметь в виду, что поверхностная энергия жидкости или твердого тела зависит не только от свойств данной жидкости или твердого тела, но и от свойств того вещества, с которым они граничат. Строго говоря, нужно рассматривать суммарную поверхностную энергию  $\alpha_{12}$  двух граничащих друг с другом веществ (рис. 318). Только если одно вещество газообразно, химически не реагирует с другим веществом и мало в нем растворяется, можно говорить просто о поверхностной энергии (или коэффициенте по-



верхностного натяжения) второго жидкого или твердого тела.

Если граничат друг с другом сразу три вещества: твердое, жидкое и газообразное (рис. 319), то вся система принимает конфигурацию, соответствующую минимуму суммарной потенциальной энергии (поверхностной, в поле сил тяжести и т. п.). В частности, контур, по которому граничат все три вещества, располагается на поверхности твердого тела таким образом, чтобы сумма проекций всех приложенных к каждому элементу контура сил поверхностного натяжения на направление, в котором элемент контура может перемещаться (т. е. на направление касательной к поверхности твердого

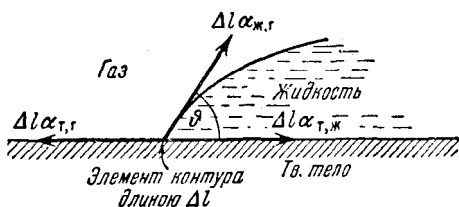


Рис. 319.

тела), была равна нулю. Из рис. 319 следует, что условие равновесия элемента контура длиной Δl запишется следующим образом:

$$\Delta l \alpha_{т,г} = \Delta l \alpha_{т,ж} + \Delta l \alpha_{ж,г} \cos \vartheta, \quad (145.1)$$

где  $\alpha_{т,г}$ ,  $\alpha_{т,ж}$  и  $\alpha_{ж,г}$  — коэффициенты поверхностного натяжения на границах: твердое тело — газ, твердое тело — жидкость и жидкость — газ.

Отсчитываемый внутри жидкости угол  $\vartheta$  между касательными к поверхности твердого тела и к поверхности жидкости называется краевым углом. В соответствии с (145.1)

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha_{т,г} - \alpha_{т,ж}}{\alpha_{ж,г}} \quad (145.2)$$

Краевой угол определяется выражением (145.2) только при условии, что

$$\frac{|\alpha_{т,г} - \alpha_{т,ж}|}{\alpha_{ж,г}} \leq 1. \quad (145.3)$$

Если (145.3) не выполняется, т.е.  $|\alpha_{т,г} - \alpha_{т,ж}| > \alpha_{ж,г}$ , ни при каком значении  $\vartheta$  не может установиться равновесие. Это имеет место в двух случаях.

1)  $\alpha_{т,г} > \alpha_{т,ж} + \alpha_{ж,г}$ . Как бы ни был мал угол  $\vartheta$ , сила  $\alpha_{т,г}$  перевешивает две другие (рис. 320, а). В этом случае жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела — имеет место полное смачивание. Замена поверхности твердое тело — газ двумя поверхностями, твердое тело — жидкость и жидкость — газ, оказывается энергетически выгодной. При полном смачивании краевой угол равен нулю.

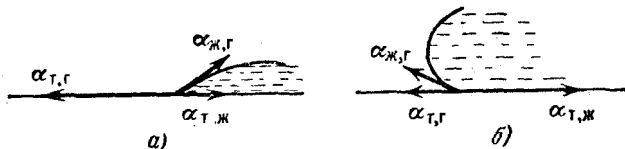


Рис. 320.

2)  $\alpha_{т,ж} > \alpha_{т,г} + \alpha_{ж,г}$ . Как бы ни был угол  $\vartheta$  близок к  $\pi$ , сила  $\alpha_{т,ж}$  перевешивает две другие (рис. 320, б). В этом случае поверхность, по которой жидкость граничит с твердым телом, стягивается в точку, жидкость отделяется от твердой поверхности — имеет место полное несмачивание. Замена поверхности твердое тело — жидкость двумя поверхностями, твердое тело — газ и жидкость — газ, оказывается энергетически выгодной. При полном несмачивании краевой угол равен  $\pi$ .

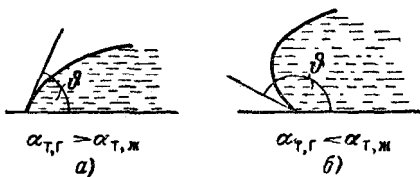


Рис. 321.

При соблюдении условия (145.3) краевой угол может оказаться острым или тупым в зависимости от соотношения между  $\alpha_{т,г}$  и  $\alpha_{т,ж}$ . Если  $\alpha_{т,г}$  больше, чем  $\alpha_{т,ж}$ , то  $\cos \vartheta > 0$  и угол  $\vartheta$  — острый (рис. 321, а). В этом случае имеет место частичное смачивание. Если  $\alpha_{т,г}$  меньше, чем  $\alpha_{т,ж}$ , то  $\cos \vartheta < 0$  и угол  $\vartheta$  — тупой (рис. 321, б). В этом случае имеет место частичное несмачивание.

Несмачивание может приводить к любопытным явлениям. Известно, что смазанная жиром иглолка или

бритвенное лезвие могут держаться на поверхности воды. Объяснение этого, на первый взгляд удивительного, явления проще всего дать, исходя из энергетических соображений. Смазанная жиром поверхность стали не смачивается водой; поверхность соприкосновения сталь — вода обладает гораздо большей энергией, чем поверхность сталь — воздух или воздух — вода. Полное погружение иглы в воду сопровождается увеличением поверхностной энергии от значения  $S\alpha_{т,г}$  (сталь — воздух) до значения  $S\alpha_{т,ж}$  (сталь — вода), где  $S$  — поверхность иглы. Изменение поверхностной энергии при погружении описывается изображенной на рис. 322 кривой  $E_{пов}$ .

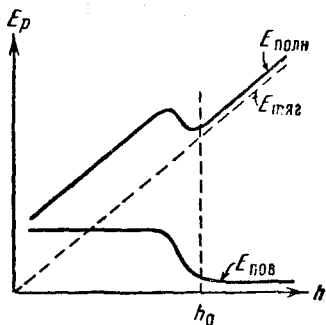


Рис. 322.

Изменение поверхностной энергии при погружении описывается изображенной на рис. 322 кривой  $E_{пов}$ . Буквой  $h$  обозначена высота иглы над дном сосуда;  $h_0$  — высота поверхности жидкости над уровнем дна. Зависимость от  $h$  потенциальной энергии иглы в поле земного тяготения  $E_{тяг}$  имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Полная энергия, равная сумме  $E_{пов}$  и  $E_{тяг}$ , имеет минимум при  $h = h_0$ , что и дает возможность игле плавать на поверхности воды. Если, нажав на иглу, погрузить ее на такую глубину, чтобы полная энергия прошла через максимум и стала уменьшаться, то игла дальше будет погружаться сама и утонет.



Рис. 323.

Аналогично объясняется возможность «носить воду в решетке». Если вода не смачивает решетку (этого

можно добиться, покрыв нити, из которых сплетено решето, парафином) и слой воды не очень велик, то небольшое перемещение уровня жидкости вниз (рис. 323) будет сопровождаться увеличением поверхностной энергии, превосходящим по величине уменьшение энергии в поле сил тяготения. Поэтому вода будет удерживаться в решетке не проливаясь.

Существование краевого угла приводит к тому, что вблизи стенок сосуда наблюдается искривление поверхности жидкости. В узкой трубке (капилляре<sup>1)</sup>) или в узком зазоре между двумя стенками искривленной оказывается вся поверхность. Если жидкость смачивает стенки, поверхность имеет вогнутую форму, если не смачивает — выпуклую

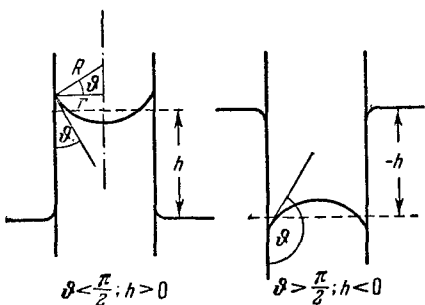


Рис. 324.

выпуклую (рис. 324). Такого рода изогнутые поверхности жидкости называются менисками.

Если капилляр погрузить одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то под искривленной поверхностью в капилляре давление будет отличаться от давления под плоской поверхностью

в широком сосуде на величину  $\Delta p$ , определяемую формулой (144.4). В результате при смачивании капилляра уровень жидкости в нем будет выше, чем в сосуде, при несмачивании — ниже.

Изменение высоты уровня жидкости в узких трубках или зазорах получило название капиллярности. В широком смысле под капиллярными явлениями понимают все явления, обусловленные существованием поверхностного натяжения. В частности, обусловленное поверхностным натяжением давление (144.4) называют, как уже отмечалось, капиллярным давлением.

Между жидкостью в капилляре и широком сосуде устанавливается такая разность уровней  $h$ , чтобы гидростатическое давление  $\rho gh$  уравновешивало капиллярное давление  $\Delta p$ :

$$\rho gh = \frac{2\alpha}{R}. \quad (146.1)$$

В этой формуле  $\alpha$  — поверхностное натяжение на границе жидкость — газ,  $R$  — радиус кривизны мениска.

<sup>1)</sup> Лат. *capillus* означает волос. Капилляр — «трубка, тонкая, как волос».

Радиус кривизны мениска  $R$  можно выразить через краевой угол  $\vartheta$  и радиус капилляра  $r$ . В самом деле, из рис. 324 видно, что  $R = r/\cos \vartheta$ . Подставив это значение в (146.1) и разрешив получившееся уравнение относительно  $h$ , приходим к формуле

$$h = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{\rho g r}. \quad (146.2)$$

В соответствии с тем, что смачивающая жидкость поднимается по капилляру, а несмачивающая — опускается, формула (146.2) дает в случае  $\vartheta < \pi/2$  ( $\cos \vartheta > 0$ ) положительные  $h$  и в случае  $\vartheta > \pi/2$  ( $\cos \vartheta < 0$ ) отрицательные  $h$ .

При выводе выражения (146.2) мы предполагали, что форма мениска является сферической. Формулу для  $h$  можно получить также на основании энергетических соображений, причем не возникает необходимости делать какие-либо специальные предположения о форме мениска.

Равновесное положение мениска будет соответствовать минимуму потенциальной энергии  $E_p$  системы жидкость — капилляр. Эта энергия складывается из поверхностной энергии на границах жидкость — стенка, жидкость — газ и стенка — газ, а также из потенциальной энергии жидкости в поле земного тяготения.

Найдем приращение энергии  $\Delta E_p$ , соответствующее небольшому приращению высоты поднятия жидкости в капилляре  $\Delta h$ . При возрастании высоты на  $\Delta h$  поверхность соприкосновения жидкости со стенкой капилляра увеличивается на  $2\pi r \Delta h$ , вследствие чего энергия получает приращение, равное  $2\pi r \Delta h \alpha_{т, ж}$ . Одновременно уменьшается поверхность соприкосновения стенки с газом, что сопровождается приращением энергии, равным  $-2\pi r \Delta h \alpha_{т, г}$ . Потенциальная энергия в поле земного тяготения получает приращение, равное весу заштрихованного объема жидкости (рис. 325), умноженному на  $h$ , т. е. равное  $g \rho \pi r^2 h \Delta h$ . Изменением уровня жидкости в широком сосуде можно пренебречь. Таким образом,

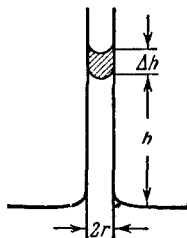


Рис. 325.

$$\Delta E_p = 2\pi r (\alpha_{т, ж} - \alpha_{т, г}) \Delta h + \pi r^2 \rho g h \Delta h.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dE_p}{dh} = 2\pi r (\alpha_{т, ж} - \alpha_{т, г}) + \pi r^2 \rho g h.$$

Приравняв эту производную нулю, мы получим условие равновесия, из которого вытекает, что

$$h = \frac{2(\alpha_{т, г} - \alpha_{т, ж})}{\rho g r} \quad (146.3)$$

Однако в соответствии с (145.2)  $\alpha_{т, г} - \alpha_{т, ж} = \alpha_{ж, г} \cos \vartheta$ . Подставив это значение в (146.3) и обозначив  $\alpha_{ж, г}$  просто  $\alpha$ , получим формулу (146.2).

В узком зазоре между погруженными в жидкость параллельными пластинками мениск будет иметь цилиндрическую форму с радиусом кривизны  $R = (d/2) \cos \vartheta$  ( $d$  — зазор между пластинками). Капиллярное давление в этом случае согласно (144.5) равно  $\frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{d}$ . Из условия

$$\frac{2\alpha \cos \vartheta}{d} = \rho g h$$

получаем, что

$$h = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{\rho g d}.$$

Если сложить вместе две отшлифованные смоченные пластинки, то между ними возникает заметная сила сцепления. Это явление имеет следующее объяснение. Поверхность жидкости в зазоре между пластинками сильно искривлена (рис. 326). Следовательно, давление внутри жидкости будет меньше атмосферного на величину



Рис. 326.

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

При полном смачивании  $R_1 = d/2$ , где  $d$  — величина зазора между пластинками. Радиус  $R_2$  сечения плоскостью, параллельной пластинкам, значительно больше, чем  $R_1$ . Поэтому можно положить  $\Delta p \approx \alpha \frac{1}{R_1} = \frac{2\alpha}{d}$ . Если

величина смоченной жидкостью поверхности каждой пластинки равна  $S$ , то пластинки будут прижиматься друг к другу с силой, равной

$$f = \Delta p S = \frac{2\alpha S}{d}. \quad (146.4)$$

Величина зазора между пластинками определяется размерами шероховатостей на их поверхностях. При зазоре порядка  $1 \text{ мк}$  и пластинках, смоченных водой,  $\Delta p$  получается порядка  $1 \text{ ат}$ , так что, если пластинки имеют размеры  $10 \times 10 \text{ см}$ , то сила сцепления между ними может достигать  $100 \text{ кг}$ .

В случае, когда между пластинками находится прослойка из несмачивающей их жидкости, возникает сила, расталкивающая пластинки. Величина этой силы также определяется выражением (146.4).

## ФАЗОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ

## § 147. Введение

В термодинамике фазой называется совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам частей системы. Поясним понятие фазы на следующих примерах. В закрытом сосуде находится вода и над ней смесь воздуха и паров воды. В этом случае мы имеем дело с системой, состоящей из двух фаз: одну фазу образует вода, вторую — смесь воздуха и паров воды. Если в воду добавить несколько кусочков льда, то все эти кусочки образуют третью фазу. Различные кристаллические модификации какого-либо вещества также представляют собой разные фазы. Так, например, алмаз и графит являются различными твердыми фазами углерода.

При определенных условиях разные фазы одного и того же вещества могут находиться в равновесии друг с другом, соприкасаясь между собой. Равновесие двух фаз может иметь место лишь в определенном интервале температур, причем каждому значению температуры  $T$  соответствует вполне определенное давление  $p$ , при котором возможно равновесие. Таким образом, состояния равновесия двух фаз изобразятся на диаграмме  $(p, T)$  линией

$$p = f(T). \quad (147.1)$$

Так, например, равновесие между жидкостью и ее насыщенным паром возможно, как мы видели в § 119, лишь в температурном интервале, заключенном между температурой тройной точки и критической температу-



рой. График функции (147.1) в этом случае представляет собой кривую упругости насыщенного пара.

Три фазы одного и того же вещества (твердая, жидкая и газообразная, или жидкая и две твердые) могут находиться в равновесии только при единственных значениях температуры и давления, которым на диаграмме ( $p, T$ ) соответствует точка, называемая тройной. Эта точка лежит на пересечении кривых равновесия фаз, взятых попарно.

В термодинамике доказывается в согласии с опытом, что равновесие более чем трех фаз одного и того же вещества невозможно.

Переход из одной фазы в другую обычно сопровождается поглощением или выделением некоторого количества тепла, которое называется скрытой теплотой перехода, или просто теплотой перехода. Существуют переходы из одной кристаллической модификации в другую, которые не связаны с поглощением или выделением тепла. Такие переходы называются фазовыми переходами второго рода в отличие от обычных переходов, называемых фазовыми переходами первого рода. Мы ограничимся рассмотрением только переходов первого рода.

## § 148. Испарение и конденсация

В жидких и твердых телах при любой температуре имеется некоторое количество молекул, энергия которых оказывается достаточной для того, чтобы преодолеть притяжение к другим молекулам, покинуть поверхность жидкости или твердого тела и перейти в газообразную фазу. Переход жидкости в газообразное состояние называется испарением, переход в газообразное состояние твердого тела носит название сублимации.

Все твердые тела без исключения в той или иной степени сублимируют. У одних веществ, таких, например, как углекислота, процесс сублимации протекает с заметной скоростью; у других веществ этот процесс при обычных температурах столь незначителен, что практически не обнаруживается.

При испарении и сублимации тело покидают наиболее быстрые молекулы, вследствие чего средняя энергия оставшихся молекул уменьшается и тело охлаждается.

Чтобы поддерживать температуру испаряющегося (или сублимирующегося) тела неизменной, к нему нужно непрерывно подводить тепло. Тепло  $q$ , которое необходимо сообщить единице массы вещества для того, чтобы превратить ее в пар, находящийся при той же температуре, какую имело вещество до испарения, называется удельной теплотой испарения (или сублимации).

При конденсации тепло, затраченное при испарении, отдается обратно: образующаяся при конденсации жидкость (или твердое тело) нагревается.

Произведем оценку теплоты испарения жидкости. При испарении некоторого количества жидкости переходящие в газообразную фазу молекулы должны совершить работу против сил, действующих в поверхностном слое (см. § 143). Эти силы действуют на пути, равном толщине слоя  $r$ . Обозначив среднюю величину силы на этом пути  $\bar{f}$ , а число молекул в единице массы через  $n'$ , работу против сил, действующих в поверхностном слое, можно представить в виде  $n'\bar{f}r$ . Процесс испарения сопровождается увеличением объема вещества, вследствие чего сопряжен с необходимостью совершения работы против внешних сил. Если испарение происходит при постоянном внешнем давлении  $p$ , работа против внешних сил равна  $p(V'_n - V'_ж)$ , где  $V'_n$  и  $V'_ж$  — удельные объемы пара и жидкости. Обе указанные выше работы совершаются за счет теплоты испарения  $q$ . Таким образом,

$$q = n'\bar{f}r + p(V'_n - V'_ж). \quad (148.1)$$

Как следует из выражения (148.1), теплота испарения уменьшается с температурой. В самом деле, с повышением температуры плотность насыщенного пара растет, что приводит к уменьшению сил, действующих на молекулу в поверхностном слое. Уменьшается также различие в удельных объемах насыщенного пара и жидкости. Следовательно, при повышении температуры оба слагаемых в (148.1) убывают. При критической температуре теплота испарения обращается в нуль.

Рассмотрим процесс установления равновесия между жидкостью и ее паром. Возьмем герметичный сосуд, частично заполненный жидкостью (рис. 327), и допустим, что первоначально из пространства над жидкостью

вещество было полностью удалено. Вследствие процесса испарения пространство над жидкостью станет наполняться молекулами. Молекулы, перешедшие в газообразную фазу, двигаясь хаотически, ударяются о поверхность жидкости, причем часть таких ударов будет сопровождаться переходом молекул в жидкую фазу. Количество молекул, переходящих в единицу времени в жидкую фазу, очевидно, пропорционально количеству ударяющихся о поверхность молекул, которое, как мы знаем [см. (99.9)], в свою очередь пропорционально  $n\bar{v}$ , т. е. растет с давлением  $p$ . Следовательно, наряду с испарением протекает обратный процесс перехода молекул из газообразной в жидкую фазу, причем интенсивность его растет по мере увеличения плотности молекул в пространстве над жидкостью. При достижении некоторого, вполне определенного (для данной температуры) давления количества молекул, покидающих жидкость и возвращающихся в нее, станут равны. Начиная с этого момента, плотность пара перестает изменяться. Между жидкостью и паром установится подвижное равновесие (рис. 327), которое будет существовать до тех пор, пока не изменится объем или температура системы.

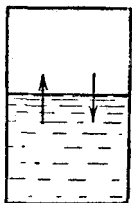


Рис. 327.

Давление, соответствующее подвижному равновесию, есть давление насыщенных паров  $p_{н.п.}$ . Если увеличить объем сосуда, давление пара упадет и равновесие будет нарушено. В результате превратится в пар дополнительное количество жидкости, такое, чтобы давление снова стало равно  $p_{н.п.}$ . Аналогично уменьшение объема приведет к превращению некоторого количества пара в жидкость.

Количество молекул, покидающих жидкость в единицу времени, сильно растет с температурой. Количество молекул, ударяющихся о поверхность жидкости, зависит от температуры в меньшей степени (через  $\bar{v}$  как  $\sqrt{T}$ ). Поэтому при повышении температуры равновесие между фазами нарушается и в течение некоторого времени поток молекул в направлении жидкость  $\rightarrow$  пар будет превышать поток в направлении пар  $\rightarrow$  жидкость. Это продолжается до тех пор, пока возрастание давления не приведет снова к установлению подвижного равновесия.

Таким образом, давление, при котором устанавливается подвижное равновесие между жидкостью и паром, т. е. давление насыщенных паров, оказывается зависящим от температуры. Вид этой зависимости показан на рис. 274.

Все сказанное о равновесии между жидкостью и газом справедливо и для системы твердое тело—газ. Каждой температуре соответствует определенное значение давления, при котором устанавливается подвижное равновесие между твердым телом и газом. Для многих тел, таких, например, как твердые металлы, это давление при обычных температурах настолько мало, что не может быть обнаружено самыми чувствительными приборами.

### § 149. Плавление и кристаллизация

Переход кристаллического тела в жидкое состояние происходит при определенной для каждого вещества температуре и требует затраты некоторого количества тепла, называемого теплотой плавления.

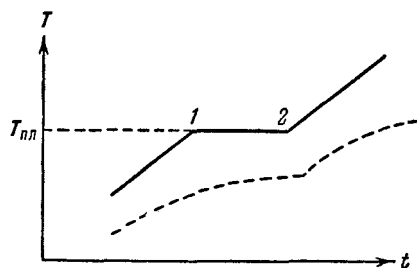


Рис. 328.

Если веществу, первоначально находившемуся в кристаллическом состоянии, сообщать каждую секунду одно и то же количество тепла, то изменение температуры тела со временем будет таким, как показано на рис. 328. Вначале температура тела все время растет. По достижении температуры плавления  $T_{пл}$  (точка 1 на рис. 328), несмотря на то, что к телу по-прежнему продолжает подводиться тепло, температура его перестает изменяться. Одновременно начинается процесс плавления твердого тела, в ходе которого все новые и новые порции вещества превращаются в жидкость. После того как процесс плавления будет закончен и все вещество полностью перейдет в жидкое состояние (точка 2 на рис. 328), температура снова начнет повышаться.

Кривая нагревания аморфного тела выглядит иначе (см. пунктирную кривую на рис. 328). При равномер-

ном подводе тепла температура аморфного тела непрерывно растет. Для аморфных тел нет определенной температуры перехода в жидкое состояние. Этот переход совершается непрерывно, а не скачком. Можно лишь указать интервал температур, в пределах которого происходит размягчение тела. Это объясняется тем, что жидкости и аморфные тела отличаются лишь степенью подвижности молекул, — аморфные тела, как уже отмечалось, представляют собой сильно переохлажденные жидкости.

Температура плавления зависит от давления. Таким образом, переход из кристаллического в жидкое состояние происходит при вполне определенных условиях, характеризующихся значениями давления и температуры. Совокупности этих значений соответствует кривая на диаграмме  $(p, T)$ , которую принято называть кривой плавления. Кривая плавления идет очень круто. Для того, например, чтобы изменить на  $1^\circ$  температуру таяния льда, необходимо изменить давление на 132 ат.

Точки кривой плавления определяют условия, при которых кристаллическая и жидкая фазы могут находиться в равновесии друг с другом. Такое равновесие возможно при любом соотношении между массами жидкости и кристаллов, т. е. при значениях объема системы, заключенных в пределах от  $mV'_T$  до  $mV'_ж$ , где  $m$  — масса системы, а  $V'_T$  и  $V'_ж$  — удельные объемы твердой и жидкой фаз. Поэтому каждой точке кривой плавления соответствует на диаграмме  $(p, V)$  отрезок горизонтальной прямой (рис. 329). Поскольку вещество в состояниях, изображаемых точками этого отрезка, имеет одну и ту же температуру, прямая 1—2 на рис. 329 представляет собой участок изотермы, соответствующий двухфазным состояниям вещества (ср. с горизонтальными участками изотерм на рис. 272).

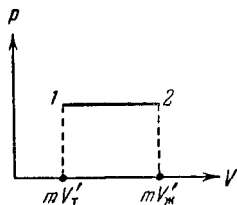


Рис. 329.

Обратный плавлению процесс кристаллизации протекает следующим образом. При охлаждении жидкости до температуры, при которой твердая и жидкая фазы могут находиться в равновесии при данном давлении

(т. е. до той же температуры, при которой происходило плавление), начинается одновременный рост кристалликов вокруг так называемых зародышей или центров кристаллизации. Разрастаясь все более, отдельные кристаллики в конце концов смыкаются друг с другом, образуя поликристаллическое твердое тело.

Центрами кристаллизации могут служить взвешенные в жидкости твердые частицы. Тщательно очищенную от таких частиц жидкость можно охладить ниже температуры кристаллизации без того, чтобы началось образование кристалликов. Состояние такой переохлажденной жидкости является метастабильным. Обычно достаточно попасть в такую жидкость пылинке, для того чтобы она распалась на жидкость и кристаллы, находящиеся при равновесной температуре. Однако в некоторых случаях при больших переохлаждениях подвижность молекул жидкости оказывается столь незначительной, что метастабильное состояние может сохраняться очень долго. Жидкость в таких случаях обладает весьма малой текучестью и представляет собой аморфное твердое тело.

Процесс кристаллизации сопровождается выделением такого же количества тепла, какое поглощается при плавлении.

## § 150. Уравнение Клапейрона — Клаузиуса

Как мы видели в предыдущих параграфах, две любые фазы вещества могут находиться в равновесии лишь при определенном давлении, величина которого зависит от температуры. Общий вид этой зависимости можно получить с помощью второго начала термодинамики. Для этого рассмотрим цикл Карно для системы, состоящей из находящихся в равновесии двух фаз данного вещества.

Для двухфазной системы цикл Карно на диаграмме ( $p, V$ ) имеет вид, показанный на рис. 330 (температуры нагревателя и холодильника предполагаются отличающимися на очень малую величину  $\Delta T$ ). Цифрами 1 и 2 помечены крайние точки горизонтального участка изотермы с температурой  $T$ . Состояния 1 и 2 являются однофазными состояниями. Все промежуточные точки отрезка 1—2 изображают двухфазные состояния, отли-

чающиеся друг от друга распределением массы вещества между первой и второй фазой.

Изотермический процесс  $A \rightarrow B$  сопровождается фазовым превращением некоторой массы вещества  $m$ . При этом объем вещества получает приращение, равное  $m(V'_2 - V'_1)$ , где  $V'_1$  и  $V'_2$  — удельные объемы первой и второй фаз. Для того чтобы такое превращение могло произойти, веществу нужно сообщить количество тепла  $Q_1$ , равное  $m q_{12}$ , где  $q_{12}$  — удельная теплота, поглощаемая при переходе из состояния 1 в состояние 2 при температуре  $T$ . Тепло  $Q_1$

представляет собой то тепло, которое получает система в ходе цикла от нагревателя.

Холодильнику тепло отдается в ходе изотермического процесса  $C \rightarrow D$ . Количество отданного тепла равно  $Q'_2 = m' q'_{12}$ , где  $q'_{12}$  — теплота перехода  $1-2$  при температуре  $T - \Delta T$ , а  $m'$  — количество вещества, претерпевающее фазовое превращение в ходе процесса  $C \rightarrow D$ . Это количество вещества несколько отличается от  $m$ , так как некоторая масса вещества претерпевает фазовые превращения в ходе адиабатических процессов.

Работа  $A$ , совершаемая за цикл, численно равна площади цикла. Поэтому можно написать, что

$$A \approx m(V'_2 - V'_1) \Delta p. \quad (150.1)$$

Равенство (150.1) является приближенным. В пределе при  $\Delta p$ , стремящемся к нулю (для чего необходимо, чтобы  $\Delta T$  стремилось к нулю), выражение (150.1) превращается в строгое равенство.

К. п. д. цикла по определению равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \approx \frac{m(V'_2 - V'_1) \Delta p}{m q_{12}} = \frac{V'_2 - V'_1}{q_{12}} \Delta p. \quad (150.2)$$

Вместе с тем согласно (129.7) можно написать:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T}. \quad (150.3)$$

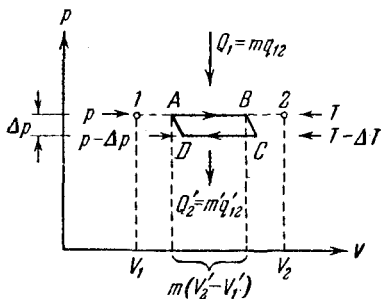


Рис. 330.

Приравняем друг другу выражения (150.2) и (150.3) для  $\eta$ :

$$\frac{V'_2 - V'_1}{q_{12}} \Delta p \approx \frac{\Delta T}{T}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \approx \frac{q_{12}}{T(V'_2 - V'_1)}. \quad (150.4)$$

В пределе при  $\Delta T$ , стремящемся к нулю, приближенное равенство (150.4) превращается в строгое равенство:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V'_2 - V'_1)}. \quad (150.5)$$

Соотношение (150.5) называется формулой (или уравнением) Клапейрона — Клаузиуса. Уравнение Клапейрона — Клаузиуса связывает производную от равновесного давления по температуре с теплотой перехода, температурой и разностью удельных объемов фаз, находящихся в равновесии.

Согласно (150.5) знак производной  $\frac{dp}{dT}$  зависит от того, каким изменением объема — возрастанием или уменьшением — сопровождается фазовый переход, происходящий при поглощении тепла. При испарении жидкости или твердого тела объем всегда возрастает, поэтому  $\frac{dp}{dT}$  для кривой испарения, а также для кривой сублимации может быть только положительной: повышение температуры приводит к увеличению равновесного давления.

При плавлении объем, как правило, возрастает, так что  $\frac{dp}{dT} > 0$ : увеличение давления приводит к повышению температуры плавления. Однако у некоторых веществ, к числу которых принадлежит и вода, объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы ( $V'_2 < V'_1$ )<sup>1)</sup>. В этом случае  $\frac{dp}{dT} < 0$  — увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления. Подвергнув лед

---

<sup>1)</sup> Известно, что вода при замерзании увеличивается в объеме. По этой причине лед имеет меньшую плотность, чем вода.



сильному сжатию, можно, не повышая температуры выше  $0^{\circ}\text{C}$ , вызвать его плавление.

Температура перехода из одной кристаллической модификации в другую будет повышаться или понижаться с ростом давления в зависимости от того, какая из твердых фаз обладает большим удельным объемом.

### § 151. Тройная точка. Диаграмма состояния

Возьмем вещество в виде жидкости и находящегося с ней в равновесии насыщенного пара и, не изменяя объема, станем отнимать от него тепло. Этот процесс будет сопровождаться понижением температуры вещества и соответствующим уменьшением давления. Поэтому точка, изображающая состояние вещества на диаграмме  $(p, T)$ , перемещается вниз по кривой испарения (рис. 331). Это продолжается до тех пор, пока не будет достигнута температура кристаллизации вещества, отвечающая равновесному значению давления.

Обозначим эту температуру  $T_{\text{тр}}$ . Все время, пока идет процесс кристаллизации, температура и давление остаются неизменными. Отводимое при этом тепло представляет собой тепло, выделяющееся при кристаллизации.

Температура  $T_{\text{тр}}$  и соответствующее ей равновесное давление  $p_{\text{тр}}$  — единственные значения температуры и давления, при которых могут находиться в равновесии три фазы вещества: твердая, жидкая и газообразная. Соответствующая точка на диаграмме  $(p, T)$  называется тройной точкой. Таким образом, тройная точка определяет условия, при которых могут находиться в равновесии одновременно три фазы вещества.

По окончании процесса кристаллизации в равновесии будут находиться твердая и газообразная фазы. Если продолжать отнимать от вещества тепло, то температура снова начнет понижаться. Соответственно уменьшается давление паров, находящихся в равновесии с кристаллической фазой. Точка, изображающая

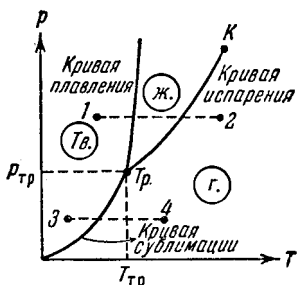
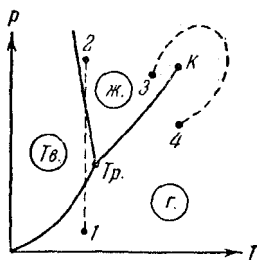


Рис. 331.

состояние вещества, перемещается вниз по кривой сублимации.

Температура тройной точки есть температура, при которой плавится вещество, находясь под давлением, равным  $p_{тр}$ . При других давлениях температура плавления будет иной. Связь между давлением и температурой плавления изобразится кривой плавления, начинающейся в тройной точке. Таким образом, тройная точка оказывается лежащей на пересечении трех кривых, определяющих условия равновесия двух фаз:



твердой и жидкой, жидкой и газообразной и, наконец, твердой и газообразной.

В зависимости от соотношения между удельными объемами твердой и жидкой фаз кривая плавления идет либо так, как на рис. 331 ( $\frac{dp}{dT} > 0$ ), либо так, как на рис. 332 ( $\frac{dp}{dT} < 0$ ).

Рис. 332.

Кривые плавления, испарения и сублимации разбивают координатную плоскость на три области. Слева от кривых сублимации и плавления лежит область твердой фазы, между кривыми плавления и испарения заключена область жидких состояний и, наконец, справа от кривых испарения и сублимации простирается область газообразных состояний вещества. Любая точка в одной из этих областей изображает соответствующее однофазное состояние вещества (все время имеются в виду только равновесные состояния, т. е. такие состояния, в которых вещество при неизменных внешних условиях пребывает сколь угодно долго). Всякая точка, лежащая на одной из разграничивающих области кривых, изображает состояние равновесия двух соответствующих фаз вещества. Тройная точка изображает состояние равновесия всех трех фаз.

Таким образом, каждая точка на диаграмме изображает определенное равновесное состояние вещества. Поэтому ее называют диаграммой состояния.

Для вещества с несколькими кристаллическими модификациями диаграмма состояния имеет более слож-

ный характер. На рис. 333 изображена диаграмма для случая, когда число различных кристаллических модификаций равно двум. В этом случае имеются две тройные точки. В точке  $T_p$  в равновесии находятся жидкость, газ и первая кристаллическая модификация вещества, в точке  $T_p'$  находятся в равновесии жидкость и обе кристаллические модификации.

Диаграмма состояния для каждого конкретного вещества строится на основе экспериментальных данных. Зная диаграмму состояния, можно предсказать, в каком состоянии будет находиться вещество при различных условиях (при различных значениях  $p$  и  $T$ ), а также какие превращения будет претерпевать вещество при различных процессах.

Поясним это следующими примерами.

Если взять вещество в состоянии, соответствующем точке 1 (см. рис. 331), и подвергнуть его изобарическому нагреванию, то вещество будет проходить изображенную пунктирной прямой 1—2 последовательность состояний: кристаллы — жидкость — газ. Если то же вещество взять в состоянии, изображенном точкой 3, и также подвергнуть изобарическому нагреванию, то последовательность состояний (пунктирная прямая 3—4) будет иной: кристаллы превращаются непосредственно в газ, минуя жидкую фазу.

Из диаграммы состояния следует, что жидкая фаза может существовать в равновесном состоянии только при давлениях не меньших, чем давление тройной точки (то же самое относится и к твердой фазе II на рис. 333). При давлениях, меньших  $p_{Tp}$ , наблюдаются только переохлажденные жидкости.

У большинства обычных веществ тройная точка лежит значительно ниже атмосферного давления, вследствие чего переход этих веществ из твердого состояния в газообразное осуществляется через промежуточную жидкую фазу. Так, например, тройной точке воды соответствует давление 4,58 мм рт.ст. и температура  $0,0075^\circ\text{C}$ .

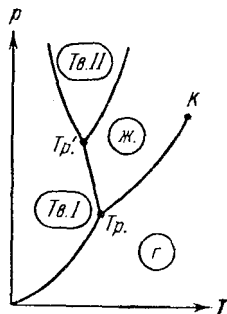


Рис. 333.

Для углекислоты давление тройной точки равно 5,11 ат (температура тройной точки — 56,6° С). Поэтому при атмосферном давлении углекислота может существовать только в твердом и газообразном состояниях. Твердая углекислота (сухой лед) превращается непосредственно в газ. Температура сублимации углекислоты при атмосферном давлении равна — 78° С.

Если удельный объем кристаллов превосходит удельный объем жидкой фазы, то поведение вещества при некоторых процессах может оказаться весьма своеобразным. Возьмем, например, подобное вещество в состоянии, изображенном точкой 1 (см. рис. 332), и подвергнем его изотермическому сжатию. При таком сжатии давление растет и процесс изобразится на диаграмме вертикальной прямой (см. пунктирную прямую 1—2). Как следует из рис. 332, вещество проходит при повышении давления такую последовательность состояний: газ — кристаллы — жидкое состояние. Подобная последовательность, очевидно, наблюдается только при температурах меньших, чем температура тройной точки.

В заключение отметим еще одну особенность диаграммы состояния. Кривая испарения заканчивается в критической точке К. Поэтому возможен переход из области жидких состояний в область газообразных состояний, совершаемый в обход критической точки, без пересечения кривой испарения (см. изображенный пунктиром переход 3—4 на рис. 332). Как выглядит такой переход на диаграмме ( $p, V$ ), показано на рис. 276. В этом случае переход из жидкого состояния в газообразное (и обратно) совершается непрерывно, через последовательность однофазных состояний.

Непрерывный переход между жидким и газообразным состояниями возможен потому, что различие между ними носит скорее количественный, чем качественный характер, в частности, у обоих этих состояний отсутствует анизотропия. Непрерывный переход из кристаллического состояния в жидкое или газообразное невозможен, ибо характерной чертой кристаллического состояния, как мы знаем, является анизотропия. Переход же от состояния, обладающего анизотропией, к состоянию, ею не обладающему, может совершаться только скачком — анизотропия не может иметься только частично, она либо есть, либо ее нет, третья возможность

исключена. По этой причине кривая сублимации и кривая плавления не могут обрываться подобно тому, как обрывается кривая испарения в критической точке. Кривая сублимации идет в точку  $p = 0$  и  $T = 0$ , кривая плавления уходит в бесконечность.

Точно так же невозможен непрерывный переход из одной кристаллической модификации в другую. Различные кристаллические модификации вещества отличаются присущими им элементами симметрии. Поскольку какой-либо элемент симметрии может только либо быть в наличии, либо отсутствовать, переход из одной твердой фазы в другую возможен только скачком. По этой причине кривая равновесия двух твердых фаз, подобно кривой плавления, уходит в бесконечность.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно твердое тело** 10  
**Абсолютный градус** 440  
— нуль температуры 319, 454  
**Авогадро закон** 321  
— число 305, 372, 374  
**Автоколебания** 222, 253  
**Адиабата идеального газа** 349, 415  
**Акустический спектр** 290  
— — линейчатый 290  
— — сплошной 290  
**Аморфные тела** 461, 474, 494  
**Амплитуда биений** 242  
— вынужденных колебаний 257  
— давления 298  
— колебания 226  
— скорости 228  
— сферической волны 280  
**Анизотропия** 461, 502  
**Атмосфера нормальная** 196  
— техническая 196  
— физическая 196  
**Атомный вес** 304  
**Аэродинамика** 193, 220
- Барометрическая формула** 369  
**Бел** 296  
**Бернулли уравнение** 204  
**Биения** 241  
**Бойля — Мариотта закон** 316, 319  
**Больцмана закон распределения**  
369, 371, 372  
— постоянная 330, 374  
**Броуновское движение** 302, 372
- Вакуум** 393  
**Ван-дер-Ваальса постоянные** 403, 405, 408  
— уравнение 403, 405, 409
- Ватт** 85  
**Вектор** 13  
— аксиальный 39  
— плотности потока энергии 278  
— полярный 39  
**Векторная диаграмма** 238  
**Векторы коллинеарные** 14  
— компланарные 14  
**Вероятность математическая** 455  
— термодинамическая 455  
**Вес** 63, 64  
**Вечный двигатель второго рода**  
429  
— — первого рода 427  
**Вильсона камера** 415  
**Водоструйный насос** 205  
**Волновая поверхность** 266  
**Волновое уравнение** 271, 272  
— число 268  
**Волновой вектор** 270  
**Волны** 263  
— бегущие 266, 471  
— затухающие 280, 281  
— звуковые 289  
— когерентные 281  
— плоские 266  
— поперечные 263  
— продольные 263  
— стоячие 283, 286, 471  
— сферические 266, 269  
— ультразвуковые 299  
**Волчок** 168  
**Вязкость** 69, 210, 211  
— газа 379  
— динамическая 215  
— жидкости 210, 219, 474  
— кинематическая 215
- Газ ван-дер-ваальсовский** 416  
— идеальный 319, 323

Газ реальный 399  
— ультраразреженный 393  
Галилея, преобразования 60  
— принцип относительности 59, 62  
Гармонический осциллятор 230  
Гей-Люссака закон 316, 317, 319  
Герц 226  
Гиббса парадокс 459  
Гидродинамика 193, 200  
Гироскоп 168  
Гироскопический компас 169  
— эффект 168  
Главные оси инерции 164, 167  
Гравитационная постоянная 181, 184  
Градиент 100  
Грамм-атом 305  
Грамм-молекула 305  
Группы пространственные 465  
Гаука закон 50, 176, 178  
Гюйгенса принцип 283

Давление 193, 194  
— внутреннее 404  
— газа 324, 329, 330, 335, 393  
— динамическое 207, 208  
— капиллярное 481, 486  
— критическое 408  
— насыщенного пара 410, 411, 493  
— отрицательное 414, 416  
— парциальное 330, 389  
— под изогнутой поверхностью жидкости 481  
— полное 207  
— статическое 207  
Дальтона закон 331  
Движение аperiodическое 253  
— вращательное 11, 122  
— в центральном поле сил 137  
— плоское 122, 124, 126  
— поступательное 11, 122, 127  
— равномерное 27  
— равнопеременное 30  
— твердого тела 122  
— тепловое 302  
Декремент затухания 251  
Деформация 10, 49  
— кручения 178  
— остаточная 174  
— пластическая 174  
— растяжения 174  
— сдвига 174

Деформация сжатия 174  
— упругая 50, 174  
Децибел 296  
Джоуль 82, 310  
Джоуля — Томсона эффект 417, 418  
Диаграмма состояния 500  
Дина 56  
Динамика 11  
Диспергирование 301  
Дисперсия 294  
Дифракция волн 283  
Дифференциальный манометр 208  
Диффузия 379, 389  
Длина волны 265  
— свободного пробега 375  
Добротность колебательной системы 251, 260  
Допплера эффект 287  
Дьюара сосуд 423  
Дюлонга и Пти закон 471

Единицы измерения 53  
— — вязкости 213  
— — давления 196  
— — мощности 85  
— — работы 82  
— — силы 56  
Единичный вектор 19, 20

Жидкость 473  
— идеальная 203, 210  
—, квазикристаллическое строение 473  
— несжимаемая 201, 202  
— перегретая 414, 415  
— переохлажденная 461, 496, 501  
— растянутая 414, 416

Закон всемирного тяготения 181, 189  
— инерции 48  
— сохранения импульса 77, 208  
— — момента импульса 138  
— — энергии 97, 98  
Законы сухого трения 67  
Зародыши 496  
Затухание волны 296  
Звук 289  
—, высота 289, 290  
—, громкость 289, 295, 296  
—, тембр 289, 290

Звук тональный 290  
Зонд 207

**И**  
Изобара 318  
Изобразительная точка 231  
Изотерма 317  
— Ван-дер-Ваальса 406, 409  
— двухфазной системы 409, 410, 495  
— идеального газа 317  
— критическая 407, 412  
— экспериментальная 409, 411  
Изотропия 461  
Изохора 318  
Изэнтропа 449  
Импульс 73, 74  
— системы 75, 76  
Инертность 51  
Интенсивность звука 295  
Интерференция волн 281  
Инфразвук 289  
Испарение 491  
Источник точечный 269  
Источники когерентные 281

Кавендиша опыт 183, 184  
Калория 310  
Капилляр 486  
Капиллярность 486  
Капицы турбодетандер 423  
Карно цикл 430, 436, 449, 496  
Квадрат вектора 82  
Квантование энергии 346  
Келлера законы 188  
Килогерц 226  
Килограмм 55  
Килограмм-атом 305  
Килограмм-молекула 305  
Килограммометр 82  
Килограмм-сила 56  
Килокалория 310  
Киломоль 305  
Кинематика 11  
Кипение 415  
Клапейрона — Клаузиуса формула 496, 498  
Клапейрона уравнение 321  
Классы симметрии 465  
Клаузиуса неравенство 442  
Когерентность 281  
Колебания 221  
— вынужденные 222, 254  
— — установившиеся 257

Колебания гармонические 222, 223, 225, 239, 267  
— затухающие 248  
— малые 233  
— параметрические 222  
— свободные 222  
— собственные 222  
— струны 286  
Количество движения 74  
— тепла 309  
Конденсация 414, 491  
Концентрация 388  
Коэффициент внутреннего трения 211, 379  
— вязкости 211, 213, 382  
— — газа 379  
— диффузии 390, 391, 392  
— затухания волны 281  
— — колебаний 250  
— поверхностного натяжения 477, 479  
— поглощения волны 281  
— полезного действия обратной машины 436  
— — — тепловой машины 427  
— — — цикла Карно 437  
— поперечного сжатия 176  
— Пуассона 176  
— сопротивления 248  
— теплопроводности 384  
— — газа 387  
— — ультраразреженного газа 395  
— трения 68, 70  
— — в ультраразреженном газе 394  
— упругости 175  
— холодильный 428  
Краевой угол 483  
Кривая инверсии 420  
— испарения 498, 499  
— плавления 495, 500  
— сублимации 498, 500  
Кривизна кривой 33  
— поверхности 480  
Кристаллизация 495  
Кристаллическая решетка 462, 463  
Кристаллографические системы 465  
Кристаллы 461  
— атомные 466  
— жидкие 473, 474  
— ионные 466



Кристаллы металлические 468  
— молекулярные 468  
Критические величины 408  
Ламмерта опыт 366  
Лапласа оператор 272  
— формула 481  
Линии тока 200  
Лиссажу фигуры 247  
Логарифмический декремент за-  
тухания 251  
Лошадиная сила 85  
Лошмидта число 321

Максвелла — Больцмана закон  
распределения 371  
Максвелла закон распределения  
359, 363, 365  
Масса 49, 52  
— атома 305  
— гравитационная 187  
—, зависимость от скорости 74  
— Земли 188  
— инертная 187  
— киломоля 305  
— молекулы 305  
— Солнца 188  
— тяготеющая 187  
Материальная точка 11  
Маятник математический 234  
— оборотный 238  
— физический 235  
— —, приведенная длина 237  
— Фуко 121  
Мегагерц 226  
Мениск 486  
Метр 55  
Механика квантовая 47  
— классическая 46  
— релятивистская 47, 74  
Механический эквивалент тепла  
310  
Микропуаз 213  
Модуль вектора 13  
— сдвига 178  
— Юнга 176  
Молекула 302  
Молекулярный вес 304  
— пучок 365, 366, 367  
Моль 305  
Момент импульса относительно  
оси 134  
— — — точки 134

Момент импульса системы ма-  
териальных точек 138  
— — твердого тела 166, 167  
— инерции 128, 140, 141, 143,  
147  
— количества движения 134  
— пары сил 130, 131  
— силы относительно оси 128,  
131, 132, 141  
— — — точки 128, 129, 141  
Монокристалл 462  
Мощность 85

Напряжение 175  
— нормальное 175  
— тангенциальное 175  
Натяжение поверхностное 475,  
482, 486  
Начала термодинамики 303, 424  
Начальные условия 227  
Несомность 64  
Нерста теорема 454  
Несмачивание 484  
Нормальные условия 321  
Нормировочный множитель 359  
Ньютон 56  
Ньютона закон второй 49, 52, 74,  
140  
— — первый 47, 53  
— — третий 58, 59  
— законы 46  
— —, практическое применение  
71

Обертон 287, 290  
Обтекаемая форма тел 217  
Объем критический 408  
— удельный 410  
Ожижение газов 421  
— —, метод Клода 423  
— —, — Линде 421  
Орт 19, 20  
Оси симметрии 464  
Ось вращения 11, 37, 122  
— — мгновенная 125, 126

Пар 409, 413  
— насыщенный 410, 411  
— пересыщенный 414  
Пара сил 130  
Параметры кристаллической  
ячейки 462  
— состояния 306

Паскаля закон 196  
Перемещение 12  
Период затухающих колебаний 250  
— идентичности кристаллической решетки 462  
— колебания 226  
— маятника математического 235  
— — — физического 236  
— обращения 39  
Перпетуум мобиле второго рода 429  
— — первого рода 427  
Перрена опыт 373  
Пито трубка 207  
Плавление 494  
Плечо импульса 134  
— пары сил 130  
— силы относительно оси 133  
— — — точки 129  
Плоскости симметрии 464  
— спайности 461  
Плотность 143  
— вероятности 232  
— потока энергии 277, 280, 295  
— энергии волны 276  
— — упругой деформации 180  
Пограничный слой 217  
Подобие при течении 215  
Показатель политропы 352  
Поле вектора скорости 200  
— сил 86  
— — потенциальное 87, 88  
— — тяжести 89  
— центральных сил 86, 89  
Поликристалл 462, 496  
Политропа 351  
Порог болевого ощущения 295  
— слышимости 295  
Порядок ближний 473  
— дальний 473  
Поток тепла 384  
— энергии 277, 279, 280  
Правило правого винта 37  
— сложения скоростей 61  
Прецессия гироскопа 172  
Приведенное количество тепла 442  
Принцип отвердевания 194  
— суперпозиции 281  
Произведение векторов векторное 42  
— — —, дистрибутивность 43

Произведение векторов скалярное 82, 83  
— — —, дистрибутивность 83  
Процесс 307  
— адиабатический 348, 350  
— изобарический 318, 350  
— изотермический 317, 350, 453  
— изохорический 318, 350  
— круговой 425  
— необратимый 457  
— обратимый 424  
— политропический 350, 352  
— равновесный 308, 425  
Пуаз 213  
Пуассона уравнение 349  
Путь 12, 26  
Пучность стоячей волны 284  
Работа 79, 83, 84, 309, 312  
— идеального газа при адиабатическом процессе 354  
— — — — изотермическом процессе 354  
— — — — политропическом процессе 353  
— при вращении 149  
— — круговом процессе 425  
— — расширении 312  
Радиус-вектор 19  
Радиус молекулярного действия 404, 475  
Размерности физических величин 57, 58  
Распределение молекул по значениям кинетической энергии 363  
— — — — потенциальной энергии 370  
— — — скоростям 359  
— — — — в пучке 367  
Реактивное движение 78  
Реакция 63  
— вытекающей струи 209, 210  
— текущей жидкости на стенке трубы 209  
Резонанс 258  
— параметрический 261  
Резонансные кривые 259  
Рейнольдса число 215, 218  
— —, критическое значение 215  
Самодиффузия 392  
Свободные оси 163, 166  
Связь гетерополярная 466  
— гомеополярная 466

Связь жесткая 337  
— ионная 466  
— ковалентная 466  
— упругая 338  
Сезерленда постоянная 377  
— формула 377  
Секунда 55  
Сила 49, 101  
— Архимеда 198  
— внешняя 75, 142  
— внутренняя 75, 142  
— вынуждающая 254  
— выталкивающая 198  
— гироскопическая 170, 171  
— инерции 109, 110, 155  
— — кориолисова 112, 114, 115, 119, 120  
— — центробежная 111, 114, 115, 120  
— квазиупругая 223  
— консервативная 87  
— кулоновская 466  
— лобового сопротивления 216  
— неконсервативная 87  
— нормальная 70  
— нормального давления 66  
— подъемная 216, 219, 220  
— сопротивления среды 69  
— тангенциальная 70  
— трения 65, 88, 379, 382  
— — качения 160  
— — покоя 65, 66  
— — скольжения 67  
— тяжести 62, 64, 153, 154, 185  
— —, зависимость от широты местности 184  
— упругая 81  
— центробежная 70  
Силы ван-дер-ваальсовские 468  
— поверхностного натяжения 477  
— центральные 86  
Симметрия кристаллической решетки 463  
— трансляционная 463  
Сингонии 465  
Система единиц 54  
— — абсолютная 54  
— — международная 55  
— — МКГСС 56  
— — СГС 56  
— замкнутая 75  
— изолированная 449  
— отсчета 9  
— — гелиоцентрическая 49

Система отсчета инерциальная 48, 53, 61  
— — неинерциальная 48, 108  
— термодинамическая 306  
Скаляр 13  
Скорость волн в упругой среде 273  
— звука в газах 294  
— истечения из отверстия 206  
— космическая вторая 191, 192  
— — первая 190, 192  
— линейная 23, 39  
— молекул наиболее вероятная 360  
— — средняя 294, 362, 364  
— — — квадратичная 362  
— секториальная 190  
— угловая 39  
— — прецессии 172, 173  
— фазовая 268, 273, 275  
— центра инерции 76  
Сложение колебаний 239, 242  
Смачивание 484  
Сопротивление давления 217, 218  
— лобовое 216, 217, 218  
— трения 217, 218  
— формы 217  
Состояние метастабильное 414, 496  
— неравновесное 306  
— равновесное 307, 424  
Статика 11  
Степени свободы 233  
— — вращательные 337  
— — колебательные 338, 340, 470  
— — поступательные 336, 339  
Стокса закон 218  
Сублимация 491  
Суперпозиция волн 281  
Сухой лед 468, 502  
Сфера молекулярного действия 404, 475  
Температура 315  
— абсолютная 318, 330  
— критическая 407, 408, 411, 412, 421, 479, 492  
— плавления 494  
Температурная шкала абсолютная 316, 318  
— — идеально-газовая 322  
— — Кельвина 318  
— — термодинамическая 438, 440  
— — Цельсия 315, 318

- Температурная шкала эмпирическая 316, 322  
Температурный признак 315  
Тензор инерции 167  
Теорема о неразрывности струн 202  
Теория относительности 46, 187  
Тепловая машина 427  
Теплоемкость 340.  
— газа, зависимость от температуры 345  
— идеального газа 342, 343  
— киломоля 341  
— при политропическом процессе 351, 352  
— — — постоянном давлении 341, 342  
— — — объеме 341, 343  
— твердого тела 471  
— удельная 341  
Теплопередача 309  
Теплопроводность 384  
— газов 379  
— — при низком давлении 394  
Теплород 303  
Теплосодержание 419  
Теплота испарения 492  
— плавления 494  
— сублимации 492  
— фазового перехода 491  
Термодинамика 303, 424  
—, второе начало 424, 428  
—, первое начало 309, 310, 424, 427  
—, третье начало 454  
Термометрическое тело 315, 438  
Течение ламинарное 214  
— стационарное 201  
— турбулентное 214  
— установившееся 201  
Торричелли формула 206  
Точка критическая 407, 411  
— тройная 412, 491, 499, 500  
Траектория 12  
Трение внешнее 65  
— внутреннее 65, 210, 379, 393  
— вязкое 65, 69  
— жидкое 65  
— качения 65, 68  
— скольжения 65  
— сухое 65  
Трубка тока 201
- Удар абсолютно неупругий 103, 104  
— — упругий 103, 105  
— — центральный 104  
Узел стоячей волны 284  
Ультразвук 289, 299  
Ультразвуковая дефектоскопия 300  
— локация 300  
Ультразвуковой эхолот 300  
Умова вектор 278  
Универсальная газовая постоянная 321, 322, 343, 374  
Упругость насыщенного пара 410, 491  
Уравнение волновое 271, 272  
— волны 266  
— динамики вращательного движения 140  
— диффузии 390  
— затухающей волны 280, 281  
— плоской волны 267, 269, 271  
— состояния 316  
— — идеального газа 321, 322  
— — реального газа 403  
— стоячей волны 284  
— сферической волны 269  
— теплопроводности 384  
Уровень громкости 295  
Уровни энергии 346  
Ускорение кориолисово 114  
— линейное 29  
— нормальное 32, 36, 41, 70  
— свободного падения 62, 186  
— силы тяжести 62, 184, 238  
— — —, нормальное значение 186  
— — —, стандартное значение 186  
— тангенциальное 36, 42, 70  
— угловое 40  
— центростремительное 70  
Условие нормировки функции распределения 359  
Условия равновесия механической системы 101  
— — твердого тела 155
- Фаза волны 268  
— колебания 226  
— — начальная 226  
— термодинамическая 409, 490  
Фазовая плоскость 230  
— траектория 231, 252

Фазовый переход второго рода 491

— — первого рода 491

Физика молекулярная 302

— статистическая 303, 379

Физическая кинетика 379

Физически бесконечно малый объем 143

Фронт волны 266

Функция распределения 357, 358

— состояния 308, 311, 446

Холодильная машина 427

Центр инерции 75, 78, 127, 152, 154

— качания 237

— тяжести 75, 154

Центры конденсации 414

— кристаллизации 496

Цикл 425, 426

Частота биений 242

— колебания 226

— — математического маятника 235

— круговая 227

— основная 287, 290

— резонансная 258

— собственная 249

— циклическая 227

Частоты собственных струны 287

Число оборотов 40

— степеней свободы 336, 346

Шкала уровней силы звука 295

Штейнера теорема 145

Штерна опыт 365

Шумы 290

Электронные пары 467

Элементы симметрии кристалла 464

Эмульсия 301

Энергии равномерное распределение 336, 339

Энергия 90

— взаимодействия молекул 401

— внутренняя 308, 453

— — ван-дер-ваальсовского газа 417

— — идеального газа 340, 342

— — кристалла 470

— — реального газа 416

— гармонического колебания 228

— — осциллятора 231

— кинетическая 90, 91, 92

— — при плоском движении 151, 152

— — твердого тела 148

— поверхностная 476, 482

— полная 95, 96

— потенциальная 90, 93, 94, 101

— свободная 453, 479

— связанная 453

— упругой волны 275

— — деформации 179

Энтальпия 419

Энтропия 447, 449, 454

— идеального газа 457

—, статистическое толкование 454

Эрг 82

Эффективное сечение молекулы 375

Эффективный диаметр молекулы 375, 378, 402

Эффузионный метод разделения изотопов 398

Эффузия 396

— встречная изотермическая 397

— тепловая 396

Явления капиллярные 486

— переноса 379

Ячейка кристалла примитивная 463

— — элементарная 462